



第二章 极限与连续

2.1 极限的概念

一 数列极限的定义

概念的引入

《九章算术》：割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽



正六边形的面积 A_1

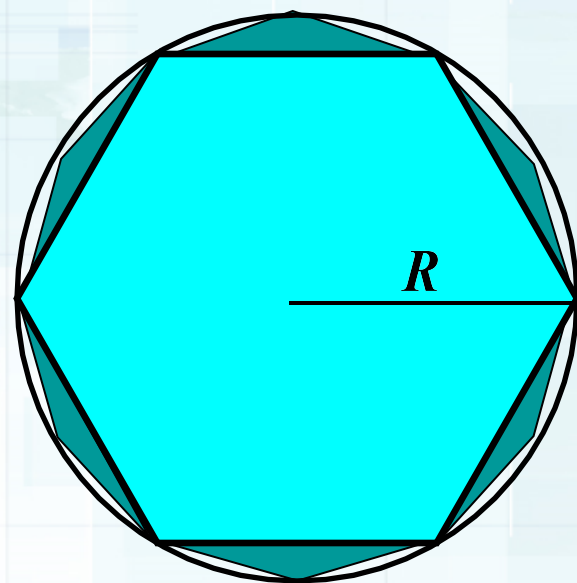
正十二边形的面积 A_2

L L

L L

正 $6 \times 2^{n-1}$ 形的面积 A_n

$A_1, A_2, A_3, \text{L}, A_n, \text{L} \rightarrow S$



思考：

$0.9999999999999 \dots \dots \dots$

$=1$

成立吗？为什么？

数列的概念:

按自然数 $1, 2, 3, \dots$ 编号依次排列的一列数

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

称为**数列**, 简记为数列 $\{u_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的**项**, 第 n 项 u_n 叫做数列的**一般项**或**通项**.

例如:

数列

通项

数列1

2, 4, 8, L, 2^n , L

$\{2^n\}$

数列2

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, L, \frac{1}{2^n}, L$

$\{\frac{1}{2^n}\}$

数列3

1, -1, 1, L, $(-1)^{n+1}$, L

$\{(-1)^{n+1}\}$

数列4

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, L, \frac{n}{n+1}, L$

$\{\frac{n}{n+1}\}$

数列的极限:

观察数列2和数列4 当 $n \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.

问题: 当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值? 如果是, 如何确定?

通过观察:

$$x_2 = \frac{1}{2^n} \text{ 无限接近于 } 0.$$

当 n 无限增大时,

$$x_4 = \frac{n}{n+1} \text{ 无限接近于 } 1.$$

数列极限的定义:

对于数列 $\{x_n\}$ 若当 n 无限增大时, 通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A , 则常数 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A .

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ 若数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

例:

(1) 对于数列: $\{\frac{1}{2^n}\}$ 当 n 无限增大时,

$x_2 = \frac{1}{2^n}$ 无限接近于0, 其极限为0 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(2) 对于数列: $\{\frac{n}{n+1}\}$ 当 n 无限增大时,

$x_4 = \frac{n}{n+1}$ 无限接近于1. 其极限1 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

(3) 对于数列: $\{2^n\}$ 当 n 无限增大时,

$x_n = 2^n$ 也无限增大, 极限不存在。

故数列 $\{2^n\}$ 发散。

思考: 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$

收敛还是发散? 为什么?

练习:

观察下列数列的极限:

$$(1) \quad u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

$$(2) \quad u_n = \frac{n-1}{n+1}$$

$$(3) \quad u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^n}$$

二 函数极限的定义

1、当自变量趋于有限值 ($x \rightarrow x_0$) 时，函数

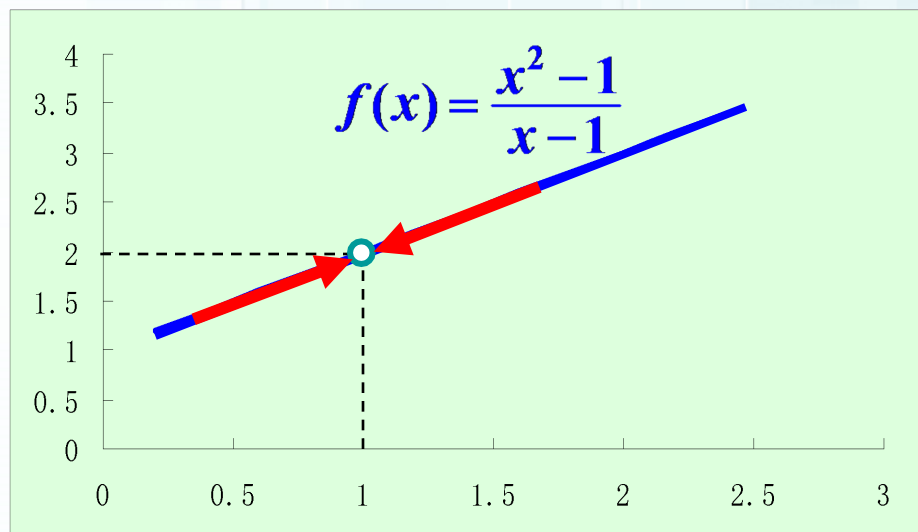
观察函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 当 x 无限趋于有限值 $1 (x \rightarrow 1)$

时的变化趋势。

从图中观察到，

当 $x \rightarrow 1$ 时，

$f(x)$ 无限接近 2.



定义1:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近 x 有定义, 当自变量 x 无限趋近于某一确定的常数 A 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于 A , 称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

注意: 函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关;

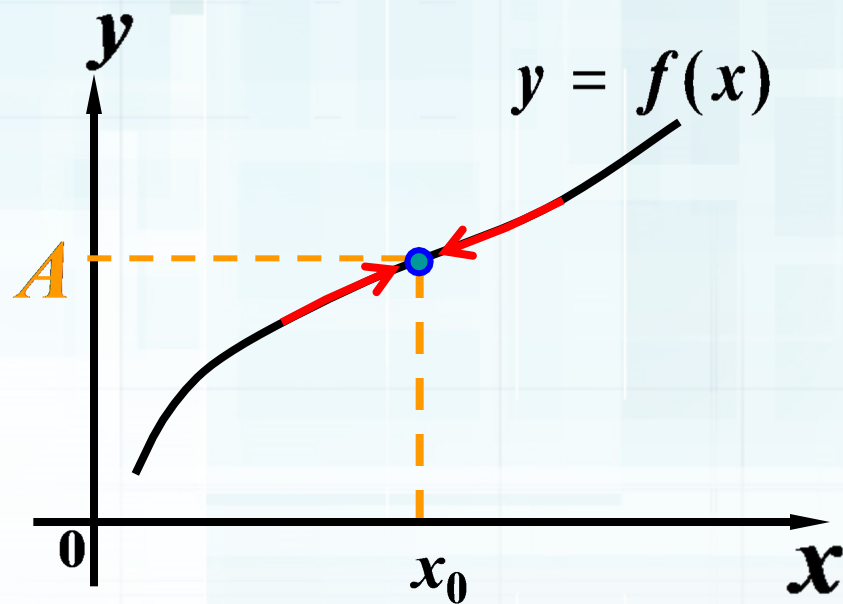
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

的几何意义:

显然有,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \text{ 为常数}).$$



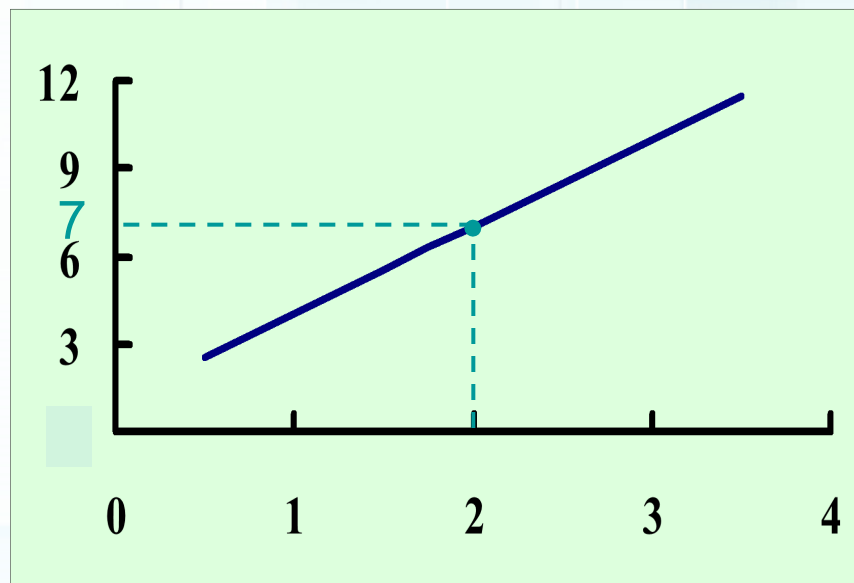
例 当 $x \rightarrow 2$ 时, 观察 $f(x) = 3x + 1$ 的极限是多少?

解 当 $x \rightarrow 2$ 时, 由图观察到

$$f(x) = 3x + 1 \rightarrow 7.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7.$$



有时分 $x > x_0$ 和 $x < x_0$ 两种情况分别讨论

右极限:

x 大于 x_0 而趋向 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 时, $f(x)$ 以 A 为极限,

称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 的右极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

左极限:

x 小于 x_0 而趋向 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 时, $f(x)$ 以 A 为极限,

称 A 是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的必要条件:

当 $x \rightarrow x_0^+$ 与 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 均以 A 为极限.

例：试求函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限。

解：1: 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$f(x) \quad x=0$$

在

处左、右极限存在但不相等，所以，当

$$x \rightarrow 0 \quad f(x)$$

的极限不存在。

2: 当

$$x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

因为

$$x \rightarrow 1 \quad f(x)$$

，即

$$f(x) \quad x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

在

处左、右极限存

在而且相等，所以当

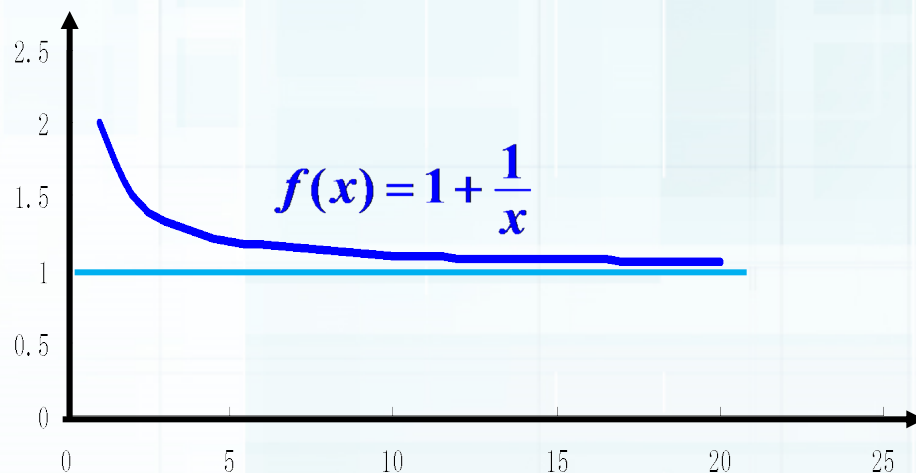
2、当自变量趋于无穷大 ($x \rightarrow \infty$) 时, 函数

观察 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 当 x 无限变大时的变化趋势

当 x 无限变大,

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 趋于 1.

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$



定义2:

函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

内有定义, 若当

$$|x|$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$f(x)$$

无限接近于某一确定的常数

A

A), 相应的函数值 $f(x)$ $x \rightarrow \infty$

称为函数

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

时的极限, 记为

$$x \rightarrow \infty$$

$$x$$

或

,

$$|x|$$

其中

$$x > 0$$

表示

$$x \rightarrow +\infty$$

注意:

的绝对值无限增大.

$$x < 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

一个常用的结论:

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$,

同时当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow A$ 也成立.

这时记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

例： 讨论函数 $y = e^x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

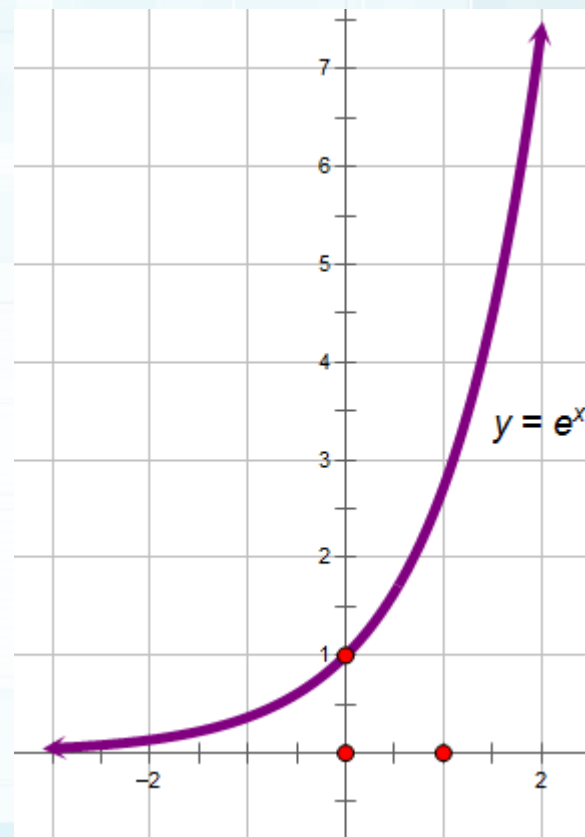
解： 观察函数 $y = e^x$ 的函数图像：

由图可知：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在。



例： 讨论函数 $y = \arctan x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

解： 观察函数 $y = \arctan x$ 的函数图像：

由图可知：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ **不存在。**

