



第二章 极限与连续

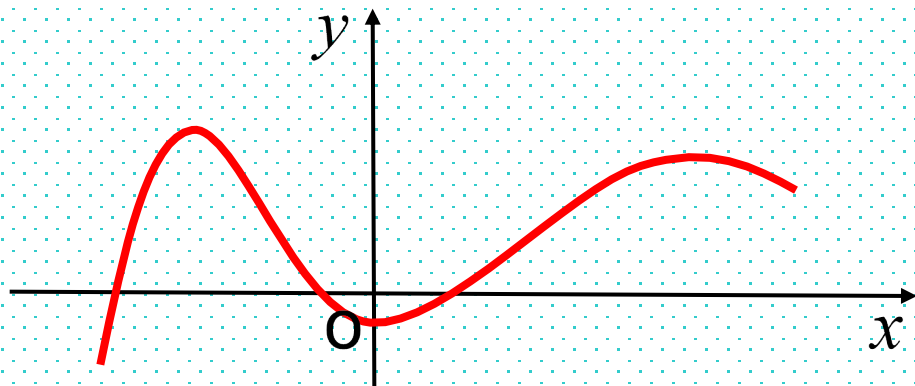
2.4 函数的连续性

函数的连续性

自然界中气温的变化，河水的流动，植物的生长等都是连续的变化着，反映在函数关系上就是函数的连续性。

当时间的变化很微小时，气温的变化也是很微小的。一般的，当自变量的改变量很微小时，因变量的改变量也很微小，函数的这个特性称为连续性。

连续函数在图像上是一条连续无间断点的曲线。



一 连续函数的概念

1: 增量

定义： 对于函数 $y=f(x)$,如果自变量从初值 x_0 变到终值 x , 对应的函数值由 $f(x_0)$ 变化到 $f(x)$, 则称 $x-x_0$ 为**自变量的增量**, $f(x)-f(x_0)$ 为**函数的增量**, 分别记作 Δx , Δy .

增量:

由定义可知:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \text{或} \quad x = x_0 + \Delta x.$$

函数的增量:

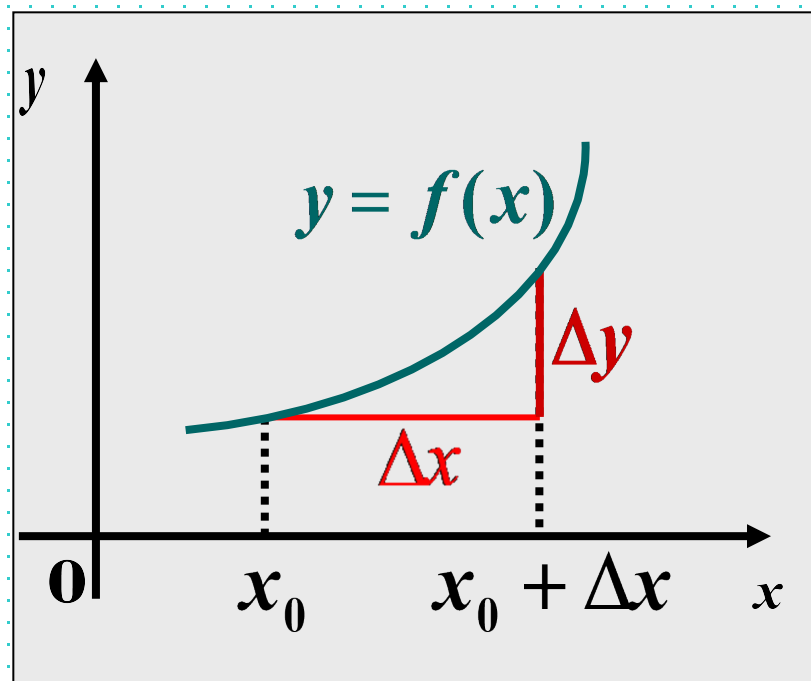
$$\Delta y = f(x) - f(x_0).$$

函数的增量也可表示为:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

增量:

增量的几何意义:



例：已知函数 $f(x) = 3x^2 - 1$ ，在下列条件下求自变量 x 的增量和函数 y 的增量。

(1) 当 x 从 1 变到 1.5 时 (2) 当 x 从 1 变到 0.5 时

解：(1) $\Delta x = 1.5 - 1 = 0.5$

$$\Delta y = f(1.5) - f(1) = 5.75 - 2 = 3.75$$

(2) $\Delta x = 0.5 - 1 = -0.5$

$$\Delta y = f(0.5) - f(1) = -0.25 - 2 = -2.25$$

注意：增量的值可正可负。

函数在一点连续:

定义1:

如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$.

即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$,

则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续.

函数在一点连续:

定义 2 如果

(1) 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

存在;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数

$$f(x)$$

例：已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？

解：由条件可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 及附近有定义。

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{并且} \quad f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

所以，由上述定义2可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

函数的间断点：

由定义2可知，函数在一点连续要同时满足下列三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

上述三个条件至少有一个不满足，则点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

函数的间断点:

例:

函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 它在 $x = 0$ 处没有定义,

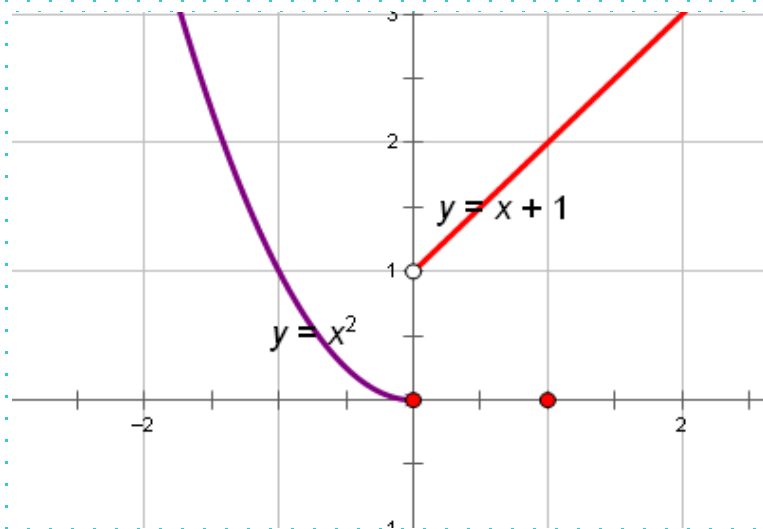
所以 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的间断点.

函数的间断点：

例：设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$

讨论函数在 $x = 0$ 处的连续性.

先观察该分段函数的**图像**：



函数的间断点:

例: 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$

讨论函数在 $x=0$ 处的连续性.

解: $x=0$ 处函数 $f(x)$ 有定义, 且 $f(0)=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

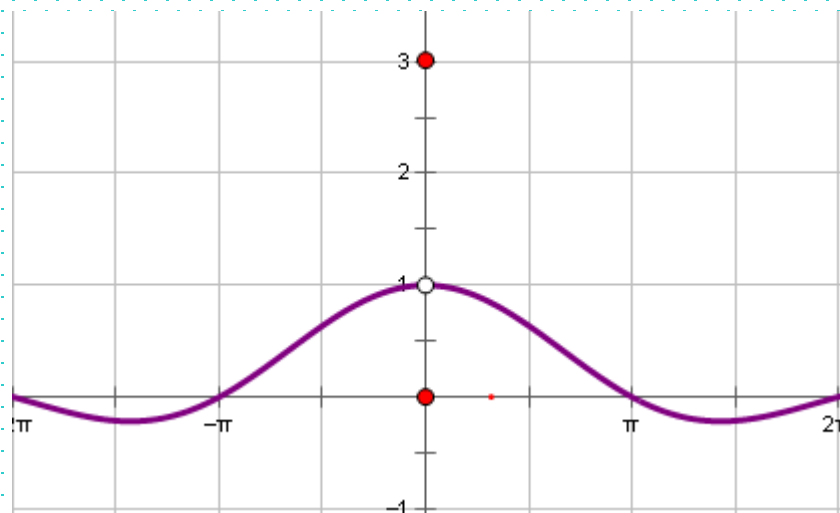
故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

函数的间断点：

例：设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

讨论函数在 $x = 0$ 处的连续性.

先观察该分段
函数的图像：



函数的间断点:

例: 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

讨论函数在 $x = 0$ 处的连续性.

解: $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 有定义, 且 $f(0) = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

即函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续,
 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点

练习：设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x + b, & 0 \leq x < 1 \\ a, & x = 1 \\ x - b, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

试确定a和b的值，使函数f(x)在x=1处连续。

解：函数f(x)在x=1处连续必须满足条件： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + b) = 3 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - b) = 1 - b$$

所以： $3 + b = 1 - b \Rightarrow b = -1$ 即： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

所以： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a = 2$

初等函数的连续性:

定理 初等函数在其定义区间（定义域内的一个区间）内是连续的.

根据定理，初等函数在连续点求极限可用“代入法”

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \text{点 } x_0 \in \text{定义区间}$$

初等函数的连续性:

例: 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x$

解: $x = \frac{\pi}{2}$ 是初等函数 $y = \ln \sin x$ 定义域上的点

因此

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln \sin \frac{\pi}{2} = \ln 1 = 0$$

例： 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解： 令 $u = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$y = \ln u$ 在
 $u = e$ 处连续

$$= \lim_{u \rightarrow e} \ln u$$

$$= \ln e = 1.$$

结论： $\ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0).$

闭区间上连续函数的性质：

定理2 (最大值和最小值定理)

闭区间上的连续函数一定存在最大和最小值

定理3 (零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

闭区间上连续函数的性质：

定理4(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则对于满足条件 $m \leq \mu \leq M$ 的任何实数 μ , 在闭区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = \mu$.