第一章　函　　数

第一节　函数及其性质

一、集合、区间和邻域

(一)集合

1.集合：一般可以把集合理解为具有某种特定性质的事物的总体.用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

2.元素：集合中的每个事物称为集合的元素(简称元)，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

3.集合的表示方法：

(1) 列举法：把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内，例如：$A=\{1,2,3\}$.

(2) 描述法：把集合中所有元素的公共属性描述出来，例如：$A=\{x \mid 0<x<6\}$.

4.子集：设 A,B 两个集合，若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

5.集合的基本运算：

(1) 并：$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

(2) 交：$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；

(3) 差：$A\backslash B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，特别地，若 $B\subset A$ 时，则称 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的补集，记作 $C_A B$.通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时 $I\backslash A$ 为 A 的余集，记作 $C_I A$ 或 A^C.

6.集合的基本运算法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$

(4) 幂等律：$A \cup A = A, A \cap A = A$

(5) 吸收律：$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B, A \cap B = A$，其中 $A \subset B$

$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

(6) 对偶律：$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

7. 乘积集合：A, B 为任意两个非空集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，把有序对 (x,y) 作为新的元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记作 $A \times B$. 即 $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

(二) 区间

1. 开区间：$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；
2. 闭区间：$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；
3. 半开区间：$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；
4. 无限区间：$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$，

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$，

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

(三) 邻域

1. 邻域：$a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 或 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，点 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

2. 去心邻域：点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ 邻域. 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，且 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$.

若 $a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid a < x < a+\delta\}$ 与 $\{x \mid a-\delta < x < a\}$ 分别为点 a 的右 δ 邻域与点 a 的左 δ 邻域，分别记作 $\mathring{U}_+(a,\delta), \mathring{U}_-(a,\delta)$.

二、函数的基本概念

函数定义：设 D 为一个给定的实数集，对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，总存在唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数，习惯上也称 y 是 x 的函数，并记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

注： (1) 函数常用 $f, g, F, G, \varphi, \psi$ 等表示，如 $y = g(x), y = F(x), x = \varphi(t)$.

(2) 两个要素：定义域 D 和对应法则 f. 几个表达形式不同的函数是否为同一函数完全取决于这两个要素.

练习 1.1

1. 设 A,B 分别为下列两个给定的集合，试求 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A$.

(1) $A=\{1,3,5,7,8\}, B=\{2,4,6,8\}$；

(2) $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty), B=[-10,3)$；

(3) $A=\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}, B=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$.

2. 设 $A=\{x \mid x^2+x-6<0\}, B=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，试求 $A\cap B$.

3. 求下列各函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(2) $y=\arcsin(\frac{x-3}{2})$；　(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(4) $y=\tan(x+1)$；　(5) $y=\ln(x+1)$；　(6) $y=\arcsin(\ln x)$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$；　(2) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}, g(x)=x-3$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$；　(4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$；

(5) $f(x)=x, g(x)=\arcsin(\sin x)$；　(6) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

5. 求下列函数的表达式.

(1) 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$.

6. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\sin x$；　(2) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. 设 $f(x)=ax+b$，若 $f(0)=-2, f(3)=5$，求 a 和 b.

8. 设 $f(x)=2x^2+2x-4$，求 $f(1)$、$f(x^2)$、$f(a)+f(b)$.

第二节　反函数与复合函数

一、反函数

定义　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，若对于任意 $y\in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好唯一确定出一个 $x\in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$. 我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数，习惯上将 $x=g(y)$ 记作 $x=f^{-1}(y)$.

注:习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 W 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在,且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是单调增加或单调减少的.

二、复合函数

复合函数:如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,就称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

注:函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,这样函数才能复合,否则复合就没有意义,如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合.

例 设函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$,$g(x)=\mathrm{e}^x$,求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)$,$g(x)$ 符合复合条件,所以 $f[g(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -\mathrm{e}^x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$,

$$g[f(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -1\leqslant x<0 \end{cases}.$$

练习 1.2

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$,求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.
2. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x)$.
3. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n个f}$.
4. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$,求 $f(10)$,$f(1)$,$f(10^{-1})$.
5. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(2)$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$;

(3)$y=1+\ln(x+2)$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1)$y=\sqrt{1-\sin x}$; (2)$y=\sin x^2$; (3)$y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$;

(4) $y=(1+\lg x)^3$；　　(5) $y=\sin(2+\ln x)$；　　(6) $y=\dfrac{\tan^2 x}{2}$.

7. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$ 及 $f(\sin x)$.

第三节　初等函数

基本初等函数有以下几种：

1. 幂函数：$y=x^a(a\in\mathbf{R})$，x 的取值范围由常数 a 确定.
2. 指数函数：$y=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
3. 对数函数：$y=\log_a x(x\in(0,+\infty))$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
4. 三角函数：

正弦函数　$y=\sin x\quad(x\in\mathbf{R})$；

余弦函数　$y=\cos x\quad(x\in\mathbf{R})$；

正切函数　$y=\tan x\quad\left(x\in\left\{x\mid x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right)$；

余切函数　$y=\cot x\quad(x\in\{x\mid x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$.

5. 反三角函数：

反正弦函数　$y=\arcsin x\quad(x\in[-1,1])$；

反余弦函数　$y=\arccos x\quad(x\in[-1,1])$；

反正切函数　$y=\arctan x\quad(x\in\mathbf{R})$；

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x\quad(x\in\mathbf{R})$.

6. 常量函数：$y=c$（c 为常数）

练习 1.3

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $y=\ln(5x+1)$；　　(4) $y=\arcsin(2x-3)$；

(5) $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$.

2. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$；

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{\sqrt{3}}{2})$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$f(1)$ 的值.

4. 下列函数哪些是基本初等函数?哪些是初等函数?

(1) $y=\cos t$；　(2) $y=\cos(2t+\varphi)$；　(3) $y=e^x$；

(4) $y=\tan\frac{1}{x^2+1}$；　(5) $y=\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+4}}$；　(6) $y=\ln(3+\cos e^{2x})$.

5. 已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

测　试　题

1. 填空题.

(1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，那么函数 $f(x^2)$ 的定义域为________；

(2) 若 $f(x)=\begin{cases}x+1, x>0\\ \pi, x=0\\ 0, x<0\end{cases}$　则 $f\{f[f(-1)]\}=$ ________；

(3) 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，则 $f(\cos x)=$ ________；

(4) 函数 $y=\sqrt{2-3x}$ 的复合过程是________________；

(5) 设 $y=x-2\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{1}{2})$.

3. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，$g(x)=1-x$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\ln e^x$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$.

5. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

6. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时按基本运费计算，如从

北京到某地收 0.30 元/kg，当超过 50 kg 时，超重部分按 0.45 元/kg 收费，试求某地的行李费 y（单元：元）与质量 x（单位：kg）之间的函数关系，并画出该函数的图形.

7.设有一边长为 a 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖箱子，试将箱子的体积表示成小正方形边长的函数.

8.某工厂生产某种产品 1600T，定价为 150 元/T，销售量在不超过 800T 时，按原价出售，超过 800T 时，超过部分按八折出售，试求销售收入与销售量之间的函数关系.

9.某人持有 10 000 元想进行投资，现有两种投资方案：一种是一年支付一次红利，年利率是 12%；另一种是一年分 12 个月按复利支付红利，月利率 1%，问哪一种投资方案较为合算？

第二章　极限与连续

第一节　极限的概念

一、数列

(一) 数列的概念

设 $y_n = f(n)$ 是定义在整数集上的一个函数，当自变量 n 依次取 1，2，3，… 时，其相应的函数值所排成的一列数 $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$ 称为一个无穷数列，简称数列，记作 $\{y_n\}$ 或 $\{f(n)\}$. 数列中的每一个数称为项，数列 $\{y_n\}$ 的第 n 项 y_n 称为一般项或通项.

(二) 有界数列

对数列 $\{y_n\}$，若存在两个实数 m, M，使得 $m \leqslant y_n \leqslant M(n = 1, 2, \cdots)$，那么 $\{y_n\}$ 为有界数列. 其中 m, M 分别称为数列 $\{y_n\}$ 的下界与上界，否则，$\{y_n\}$ 为无界数列.

(三) 单调数列

设数列 $\{y_n\}$，若 $y_n \leqslant y_{n+1}(n = 1, 2, \cdots)$，那么称 $\{y_n\}$ 为单调增加数列. 反之，若 $y_n \geqslant y_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$，那么称 $\{y_n\}$ 为单调减少数列. 单调增加数列和单调减少数列统称为单调数列.

(四) 子列

从数列 $\{y_n\}$ 中任意选出部分项(无穷项)，保持原来的次序，从左往右排列为 y_{n_1}，$y_{n_2}, \cdots, y_{n_k}, \cdots$ 称此数列为 $\{y_n\}$ 的子数列(简称子列)，记作 $\{y_{n_k}\}$，其中 $k = 1, 2, \cdots$

二、数列的极限

对于数列 $\{y_n\}$，当自变量 n 无限增大时，y_n 趋于某个确定的常数 A，那么 A 称为数列 $\{y_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n \to \infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A(n \to \infty).$$

若 $\{y_n\}$ 的极限不存在，则数列 $\{y_n\}$ 是发散的.

三、函数的极限

1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限：

当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 的取值与常数 L 无限接近，此时称 L 是 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

2. 当 $x \to x_0$ 时函数的极限：

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $x \to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$（当 $x \to x_0$）.

性质 1（唯一性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$，则 $A = B$.

性质 2（有界性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 x_0 的某一空心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 使得 $f(x)$ 在这个空心领域内有界.

性质 3（保号性）　若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在某个空心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，在其内 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

推论　若在某个空心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内，$f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

性质 4（夹逼准则）　若 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$（其中 δ 为某个正常数）时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

练习 2.1

1. 观察下列数列在 $n \to \infty$ 时的极限.

(1) $u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$；　　(2) $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；

(3) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$；　　(4) $u_n = n(-1)^n$.

(5) $u_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^n}$；　　(6) $u_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为偶数}; \\ \dfrac{1}{n}, n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

2. 根据函数极限的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+6) = 8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

3.设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$,讨论当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 的极限是否存在.

4.求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$,$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

5.证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时的极限为 0.

6.讨论下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2+3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}5^x$;

(3) 符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, x<0 \\ 0, x=0 \\ 1, x>0 \end{cases}$,在 $x=0$ 处.

7.设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, x\leqslant 1 \\ x, 1<x<2 \\ 2x-2, x\geqslant 2 \end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$.

第二节　极限的运算法则

一、函数极限的运算法则

定理　设 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 在 x 的同一变化过程中都存在,则在这一变化过程中,它们的和,差,积,商(当分母极限不为零时)的极限也存在,且

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

推论 1　常数可以提到极限符号之前,即

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x),\text{其中}(C\text{ 为常数}).$$

推论 2　如果 $\lim f(x)$ 存在,n 为正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

二、复合函数的极限运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

三、两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

练习 2.2

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{6x-1}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x}{1+x^2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n+1}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{x^2+5}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-7x-24}{x^2+2}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n\tan\dfrac{x}{3^n}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$.

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{3x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\ln x)^{\frac{5}{\ln x}}$.

第三节　无穷小与无穷大

一、无穷小、无穷大

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）；

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$）.

二、无穷小的比较

设 α,β 是同一变化过程中的无穷小量，则

(1) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(3) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

(4) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小；

(5) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

三、常用等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，

$\arctan x\sim x$，　$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，　$\ln(1+x)\sim x$，

$e^x-1\sim x$，　$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$.

练习 2.3

1. 根据无穷小的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=0$.

2. 根据无穷大的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^x=\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$.

3. 指出下列变量中哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $\ln x$，当 $x\to 1$ 时；　　(2) $2^{-x}-1$，当 $x\to 0$ 时；

(3) $1-\cos x$，当 $x\to 0$ 时；　　(4) $x-\sin 2x$，当 $x\to 0$ 时；

(5) $e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to 0$ 时；　　(6) e^x，当 $x\to 0$ 时；

(7) $\ln|x|$，当 $x\to 0$ 时；　　(8) $\dfrac{1+2x}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时.

4. 利用无穷小的性质计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{1+e^x}$.

5. 利用无穷小等价代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}(a\neq 0)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$　(n 为自然数)；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\tan x}{(1-\cos x)^{3/2}}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\arcsin x}{\ln(1+2x)(1-\cos 2x)}$.

第四节　函数的连续性

一、函数的连续性概念

(一) 函数的增量

$\Delta x = x_1 - x_0$ 为自变量的增量，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数的增量.

(二) 函数的连续性

1. 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$. 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续，x_0 为连续点.

也可以定义为 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义，当 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

注：函数仅在点 x_0 连续必须满足三个条件：

① 在点 x_0 的某个邻域内有定义；

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 左连续 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，右连续 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

二、函数的间断点

连续的三个条件中任一条不满足，就是间断点.

1. 函数的间断点的三种情况：

① 若 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

2. 间断点分类：

$$\text{间断点}\begin{cases} \text{第一类间断点：}\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \text{ 存在}\right)\begin{cases} \text{跳跃间断点：}\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \\ \text{可去间断点：}\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0) \end{cases} \\ \text{第二类间断点：}\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \text{ 与 } \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \text{ 不存在或只存在一个.} \end{cases}$$

第二类间断点又分为：

$$\begin{cases}\text{无穷间断点}\left(\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x),\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 之一为 }\infty\right)\\ \text{振荡间断点}(x\to x_0\text{ 时},f(x)\text{ 在某两个值之间无限次变动})\end{cases}$$

三、连续函数的和、差、积、商的连续性

性质 1 若 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处连续.

四、反函数与复合函数的连续性

性质 2 $y=f(x)$ 在 I_x 上单调增加(减少)且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上也是单调增加(减少)且连续.

注: $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的单调性和连续性相同.

性质 3 设 $y=f[g(x)]$ 由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在 x_0 的邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

注: (1) 若 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[g(x_0)]$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 存在，且 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$.

五、初等函数的连续性

一切初等函数在其定义域内的区间上都是连续的，即 $f(x)$ 为初等函数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ($x_0\in f(x)$ 的定义区间).

六、闭区间上连续函数的性质

最值：$f(x)$ 为定义在 I 上的函数，若有 $x_0\in I$，使得 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ ($f(x)\geqslant f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

性质 4 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定有最大值和最小值.

注: 若 $f(x)$ 在开区间内连续，或在闭区间有间断点，上述结论不一定成立.

性质 5(零点定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

性质 6(介值定理) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,$A<B$,则任意 $C\in(A,B)$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

练习 2.4

1.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左连续性及右连续性.

2.设 $f(x)=\begin{cases}3x+b, & 0\leqslant x<1\\ a, & x=1\\ x-b, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,试确定 a 和 b 的值,使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

3.求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})$;　(2) $\lim\limits_{x\to 1}e^{x-1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\cos(1-x^2)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 1}x(\sqrt{x^2-1}-x)$.

4.证明方程 $x^5-3x+1=0$ 在 1 到 2 之间至少有一个实根.

5.试求函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-2)}$ 的连续区间.

6.设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 当 a 为何值时,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续?

7.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 当 k 为何值时,函数 $f(x)$ 在其定义域内连续?

8.下列函数在指定点处间断吗?若是则判断间断点的类型.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$,$x=2$ 处;

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+2, x<0\\ 2e^x, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4, x\geqslant 1\end{cases}$,$x=0$,$x=1$ 处;

(3) $f(x)=\begin{cases}x\cos^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,$x=0$ 处;

(4) $f(x)=\begin{cases}3+x^2, x<0\\ \dfrac{\sin 3x}{x}, x>0\end{cases}$，$x=0$ 处.

第五节　多元函数

一、多元函数的基本概念

(一) 区域

1. n 元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$点的全体称为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$.

2. 平面区域：平面上由一条曲线或几条曲线围成的部分，它分为有界区域、无界区域. 若区域含边界称为闭区域，不包含边界称为开区域.

(二) 二元函数的定义

1. 二元函数：设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的非空点集，若对每一点$(x,y)\in D$，有一个对应法则 f，使得有唯一确定的实数值 z 与之对应，则称 z 是关于 x,y 的二元函数，记为 $z=f(x,y)(x,y)\in D$. D 为定义域.

2. 多元函数：$D\subset\mathbf{R}^n$ 为 n 维空间中的非空点集，若对 D 中每一个点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$按某一法则 f 有唯一确定实数值 z 与之对应，则称 z 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数. 记作 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

多元函数定义域为使此函数有意义的自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的范围.

(三) 二元函数的几何意义

函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形一般在空间直角坐标系中表示一张曲面，而其定义域 D 就是此曲面在 xOy 坐标面上的投影.

二、二元函数的极限

定义 1：函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一空心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内有定义. 若当点 $P(x,y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $z=f(x,y)$ 趋近于一个确定的常数 A，则称此常数 A 为 $f(x,y)$ 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A,(x,y)\to(x_0,y_0)$.

注：(1) $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$，指 P 与 P_0 之间的距离趋向于0，即 $|PP_0|\to 0$.

(2) 只要找到某两个特定方向使 $P\to P_0$ 时，$f(x,y)$ 的极限不相同或不存在，即可判断 $f(x,y)$ 在 P_0 的极限不存在. 常取的方向有 $y=0,x=0,y=kx,y=kx^2$.

三、二元函数的连续性

定义 2 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域有定义.若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称 $f(x,y)$ 在 P_0 点处连续.

定义 3 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续,则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

定义 4 若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续,则称点 P_0 为 $z=f(x,y)$ 的间断点.

注:(1) 与一元函数类似,二元函数经四则运算和复合运算得到的函数仍为连续函数,一切初等二元函数在其定义域内是连续的.

(2) 在有界闭区域上连续的函数,必有最大值和最小值,且介值定理成立.

练习 2.5

1.判定下列集合中是开区域还是闭区域?是有界区域还是无界区域?

(1) $D=\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$;

(2) $D=\{(x,y)\mid 1<x<3,2<y<4\}$;

(3) $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 1,y\geqslant 2\}$;

(4) $D=\{(x,y)\mid x>y^2-1\}$.

2.写出下列函数表达式.

(1) 平行四面体的体积 V 与底面边长 x 和 y 以及高 h 之间的关系;

(2) 匀速直线运动物体的位移 s 与速度 v 和时间 t 之间的关系;

(3) z 为平面上每一点(x,y) 的坐标之和.

3.设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f(0,1)$,$f(-2,3)$ 的值.

4.设 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2xy}$,求 $f(xy,x+y)$.

5.求下列函数的定义域.

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$;　　(2) $z=\ln(x+y)$;

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{9-x^2-y^2}$;　　(4) $z=\ln(1-|x|-|y|)$;

(5)$z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;　　(6)$z=\ln(y-x)+\arcsin\dfrac{y}{x}$.

6.求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt{x^2+y^2}$.

7. 已知函数 $f(u,v)=u^v+v^u$，试求 $f(x+y,x-y)$.

8. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}0, x\geqslant y\\1, x<y\end{cases}$，求 $f(1,0)$，$f(0,0)$，$f(0,1)$，$f(1,1)$.

测　试　题

1. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

2. 填空题.

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3\sin mx}{2x}=\dfrac{2}{3}$，则 $m=$ ________;

(2) 当________时，函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 是无穷大量;

当________时，函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 是无穷大量;

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________;

(4) 设 $f(x)\begin{cases}x^2+2x-3, x\leqslant 1\\x, 1<x\leqslant 2\\2x-2, x\geqslant 2\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=$ ______，$\lim\limits_{x\to2} f(x)=$ ______;

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}2^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\a, x=0\end{cases}$，且 $f(x)$ 无间断点，则 $a=$ ________.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x+1}{2x^4+5x^2-6}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{2-x}$.

4. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+3}$.

5.已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$,求 a 和 b 的值.

6.讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

7.确定常数 k 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续.

8.求下列函数的间断点,并判定间断点类型.

(1)$y=\dfrac{1}{(x+3)^2}$;　　(2)$y=x\cos\dfrac{1}{x}$;

(3)$y=\dfrac{x}{\sin x}$;　　(4)$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

9.证明:方程 $x^3+2x=6$ 在 1 和 3 之间至少有一根.

10.求下列各式的极限.

(1)$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{xy}{2+x^2+y^2}$;　　(2)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$;

(3)$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;　　(4)$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{1}{x+y}$;

(5)$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$;　　(6)$\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)}\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

11.求下列函数的定义域.

(1)$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;　　(2)$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

(3)$f(x,y)=\dfrac{\arcsin|x-y|}{\sqrt{x-y}}$;　　(4)$f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

第三章　导数与微分

第一节　导数的概念

一、基本概念

（一）导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，就说 $f(x)$ 在 x_0 可导，并称此极限值为其导数，记为 $y'\big|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

左导数：$f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$，

右导数：$f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

导函数：如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内的每点都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导，这时，对于任意的 $x \in I$ 都有唯一确定的导数 $f'(x)$，从而定义了 I 上的一个函数，称为 $f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$，y'，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

（二）导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率，即 $f'(x_0) = \tan\alpha$，其中 α 为切线的倾斜角.

注：曲线 $y = f(x)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$，法线方程为 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$，$f'(x_0) \neq 0$.

(三) 可导与连续的关系

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

注：连续是可导的必要条件，而非充分条件.

练习 3.1

1. 根据导数的定义求下列函数的导数.

(1) $f(x) = \cos x$；　　(2) $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

2. 利用求导公式求下列函数的导数.

(1) $y = x^2\sqrt{x}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{x^5}$；

(3) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$；　　(4) $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

3. 已知 $f(x) = \cos x$，求 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 和 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点(4,2)处的切线方程和法线方程.

5. 试求曲线 $y = \dfrac{1}{3}x^3$ 上与直线 $x - 4y - 5 = 0$ 平行的切线方程.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$，为使函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续且可导，a 和 b 怎样取值?

第二节　函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1　设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数，且有以下法则：

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$；

(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x) \neq 0)$.

推论 1　$[Cu(x)]' = Cu'(x)$(C 为常数).

推论 2　$\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]' = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

推论 3 $[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

二、复合函数的求导法则

定理 2　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的点 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也在点 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x).$$

三、反函数的求导法则

定理 3　如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处可导，而且 $\varphi'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的点 x 处可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

就是说，反函数的导数等于直接函数导数的倒数.（证明略）

四、基本初等函数的求导法则

(1) $(C)'=0$；　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；　(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)=\sec^2 x$；　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$；　(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

练习 3.2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^5+3x^2+x+1$；　(2) $y=x^2(2+\sqrt{x})$；

(3) $y=\dfrac{x^5+\sqrt{5}+1}{x^3}$；　(4) $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+4\sqrt{3}$；

(5) $y=(1-\sqrt{x})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$；　　(6) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}$；

(7) $y=x^2\cos x$；　　(8) $y=\frac{1+x}{\sin x}$；

(9) $y=\tan x+\sin x$；　　(10) $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}$；

(11) $y=5(2x-3)(x+8)$；　　(12) $y=x^2e^x$；

(13) $y=\frac{\ln x}{\sin x}$；　　(14) $y=x\cdot e^x\cdot\cos x$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\ln(1-x^2)$；　　(2) $y=\cos\frac{3x}{2}$；

(3) $y=(2x-1)\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$；

(5) $y=e^{2x^2}$；　　(6) $y=\arctan\sqrt{x}$；

(7) $y=e^{x^2}\cos 3x$；　　(8) $y=x\ln(\cos x)$；

(9) $y=\frac{\sin x^2}{x+1}$；　　(10) $y=\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；

(11) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$；　　(12) $y=e^{\sin x}$.

3. 若 $f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$，求 $f'(0)$，$f'(-1)$ 和 $f'(1)$.

4. 已知 $f(\frac{1}{x})=\frac{x}{1+x}$，求 $f'(x)$.

5. 求下列函数在给定点的导数.

(1) $f(x)=\ln\frac{2-x^3}{x^3+2}$，$x=-1$；

(2) $f(t)=\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$，$t=4$.

6. 设 $f(x)=x^3+9x^2+2x+2$，求满足 $f(x)=f'(x)$ 的所有 x 值.

7. 若曲线 $y=x\ln x$ 的切线垂直于直线 $2x-2y+3=0$，求这条曲线的切线方程.

8. 求曲线 $y=e^{2x}+x^2$ 在 $x=0$ 的切线方程和法线方程.

第三节　函数的高阶导数

基本概念与性质

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数，相应地，称 $f'(x)$ 为一阶导数.

一阶导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，

二阶导数 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$，

三阶导数 $f'''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$，

n 阶导数 $f^{n}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$.

注：求高阶导数只须一次一次地去求导，原则上并不需要任何新的方法.

练习 3.3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=\sin x\cos mx$；　　(2) $y=x^3\ln x$；

(3) $y=x^2+\arctan x^2$；　　(4) $y=a^x\cos x$；

(5) $y=(1+x^2)\arctan x$；　　(6) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(8) $y=xe^{x^2}$.

2. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数.

(1) $y=f(\sin^2 x)$；　　(2) $y=\arctan f(x)$.

3. 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$；　　(2) $y=xe^x$；

(3) $y=\ln(1+x)$；　　(4) $y=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

4. 求下列函数指定阶数的导数.

(1) $y=e^x\sin x$，求 y'''；　　(2) $y^{(n-2)}=\dfrac{x}{\ln x}$，求 $y^{(n)}$；

(3) $y=x\cos x$，求 $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$；　　(4) $y=e^{2x}+1$，求 $y''(0)$.

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

1. 显函数：形如 $y=x+x^2$，$y=\arctan(\ln x)$ 等，用这种方式表达的函数叫显函数.

2. 隐函数：在实际问题中，常碰到一些函数是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的，例如，方程 $3x+y^2+5=0$ 表示一个函数，这样的函数称为隐函数.

3. 隐函数的显化：把一个隐函数化成显函数，例如从 $3x+y^2+5=0$ 解出 $y=\pm\sqrt{-5-3x}$ 就把隐函数化成显函数.

4. 隐函数的求导方法：方程两边同时对 x 求导，并注意到变量 y 是 x 的函数，遇到含有 y 的项，先对 y 求导，再乘以 y 对 x 的导数，得到一个含有 y' 的方程式，然后从中解出 y' 即可.

二、由参数方程所确定的函数的导数

设参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}(\alpha<t<\beta)$，如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，$\varphi'(t)\neq 0$ 且 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则 y 为 x 的复合函数，根据复合函数求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)[\varphi^{-1}(x)]'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{即} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

练习 3.4

1. 求下列隐函数的导数.

(1) $e^y+xy^2=e$；　　(2) $x=y+\arctan y$；

(3) $x^4+y^4-2x^2y=0$；　　(4) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 利用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=(\cos x)^{\sin x}$；　　(2) $y=2x^{\sqrt{x}}$；

(3) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；　　(4) $y=\frac{(3-x)\sqrt{x+2}}{(2x+1)^5}$.

3.求由下列参数方程所确定的函数的导数.

(1) $\begin{cases} x = at + b, \\ y = 2at^2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = 1 + t^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \theta(1 - \cos\theta), \\ y = 2\theta\sin 3\theta; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

4.设 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - \ln(x+y) + e^y$ 所确定,求 y'.

5.设曲线方程为 $e^{xy} - 2x - y = 3$,试求曲线在纵坐标 $y = 0$ 的点处的切线方程.

6.设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$,用对数求导法求出 $f'(1)$ 及 $f'(3)$.

7.船 A 与 B 从同一地点同时出发,A 船北行,速度为 30 km/h. B 船东行,速度为 40 km/h,试用导数求两船距离增大的速度.

第五节　偏　导　数

一、偏导数的定义

定义　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一领域内有定义,当 y 固定在 y_0,而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时,相应的函数有改变量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \text{或 } f_x(x_0, y_0).$$

类似地,当 x 固定在 x_0,而 y 在 y_0 处有改变量 Δy 时,如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \text{或 } f_y(x_0, y_0).$$

二元函数偏导数的定义可以类推到三元及三元以上的函数.

如果函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x(或对 y)的偏导数都存在,那么就确定了函数 $z = f(x,y)$ 在 D 内对 x(或对 y)的两个偏导函数,分别记做

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, z'_x, f_x(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f_x(x,y)$.

偏导数函数也简称为偏导数.

二、偏导数的求法

由偏导数的定义可知,求二元函数(或多元函数)对一自变量的偏导数时,只需将其他自变量看成常数,用一元函数的求导方法即可求得.

三、偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是:它们分别表示曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$$

在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线对 x 轴和 y 轴的斜率(如图 3-5-1 所示)。

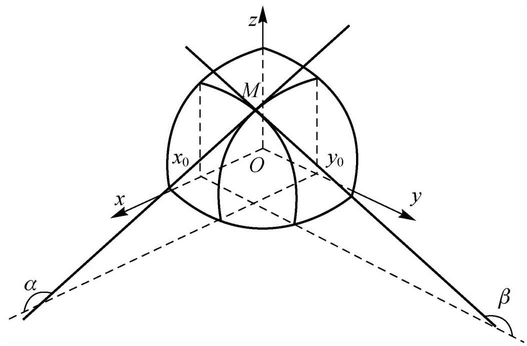

图 3-5-1

四、高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

它们仍然是 x,y 的函数,如果这两个偏导数关于 x,y 的偏导数也存在,则称它们的偏导数是 $f(x,y)$ 的二阶偏导数,记做

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数.

类似地，可得三阶，四阶以及 n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

定理　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内，这两个混合偏导数必相等.

练习 3.5

1.求下列各函数的一阶偏导数.

(1) $z=x^3y-y^3x$；　(2) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $z=\ln\sin(x-2y)$；　(4) $z=(1+xy)^y$；

(5) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$；　(6) $u=\arctan(x-y)^z$.

2.求下列函数在指定点处对各自变量的一阶偏导数值.

(1) 设 $f(x,y)=e^{-\sin x}(x+2y)$，求 $f_x(0,1)$，$f_y(0,1)$；

(2) 设 $z=x^2+xy+y^3$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}$；

(3) 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$，$f_y(4,3)$.

3.求下列函数的所有二阶偏导数.

(1) $z=x^4-4x^2y^2+y^4$；

(2) $z=\sin^2(ax+by)$（a，b 为常数）；

(3) $z=x\ln(xy)$；　(4) $z=\sqrt{xy}$；

(5) $z=y^x$；　(6) $z=x^3+y^3-3xy^2$.

4.设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yx}(0,-1,0)$，$f_{zx}(2,0,1)$.

5.求下列函数在指定点的一阶偏导数.

(1) $z=x^2+xy+y^3$ 在点(1,2)和(2,1)处的偏导数；

(2) 已知 $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f'_x(3,4)$，$f'_y(3,4)$；

(3) $f(x,y)=xe^y$ 在点(2,0)处的偏导数.

6.设 $u=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xyz$,求$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

7.设 $z=e^x(\cos y+x\sin y)$,求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{2}}}$,$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{2}}}$.

第六节　函数的微分及应用

一、微分的概念

微分:设函数 $y=f(x)$ 在某区间有定义,当 x 的增量为 Δx,相应地,函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$,可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,其中 A 是不依赖于 Δx 的常量,而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小,那么称 $y=f(x)$ 在点 x 可微,$A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分,记作 dy 或 $df(x)$,即 $dy=A\Delta x$.

二、微分的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 就是曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处切线上点的纵坐标的增量.

三、微分的运算法则

1.微分基本公式:

$dC=0$;　　$dx=dx$;

$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$;　　$d(\sin x)=\cos x dx$;

$d(\cot x)=-\sin x dx$;　　$d(\tan x)=\sec^2 x dx$;

$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$;　　$d(a^x)=a^x\ln a dx$;

$d(e^x)=e^x dx$;　　$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$;

$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$;　　$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　　$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$;

$d(\text{arccot}\,x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则：

$d(u \pm v) = du \pm dv$；　　　　$d(Cu) = Cdu$；

$d(uv) = vdu + udv$；　　　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

3. 复合函数的微分法则：设函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为

$$y' = f'(u)\varphi'(x)$$

于是复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx$$

由于
$$\varphi'(x)dx = du$$

所以
$$dy = f'(u)du$$

此式与函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x)dx$ 相比较，不管 u 是自变量或中间变量，微分的形式上是相同的，这个性质称为一阶微分形式的不变性. 有时，利用一阶微分形式的不变性求复合函数的微分比较方便.

四、微分在近似计算中的应用

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，且 $|\Delta x|$ 较小时，Δy 近似等于 dy，即 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$，则 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

在上式中，令 $x = x_0 + \Delta x$，即 $\Delta x = x - x_0$，得 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，若 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 都易求得，那么可利用公式进行近似计算.

练习 3.6

1. 求函数 $y = x^2 + x$ 在 $x = 3$ 处，在 Δx 等于 0.1，0.01 时的增量与微分.

2. 求函数 $y = x^3 - x$，自变量 x 由 2 到 1.99 时在 $x = 2$ 处的微分.

3. 求下列各函数的微分.

(1) $y = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$；　　　　(2) $y = x\cos 2x$；

(3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$；　　　　(4) $y = [\ln(1 - x)]^2$；

(5) $y = \tan^2(1 + 2x^2)$；　　　　(6) $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$；

(7) $y = e^{-x}\cos(3 - x)$；　　　　(8) $y = 5^{\ln\tan x}$；

(9) $y^2 + \ln y = x^4$；　　　　(10) $e^{\frac{x}{y}} - xy = 0$.

4. 设 $y = x^2 \ln x^2 + \cos x$，求 $dy|_{x=1}$.

5. 设 $xy^2 + \arctan y = \frac{\pi}{4}$，求 $dy|_{x=0}$.

6. 计算下列函数的近似值.

(1) $\cos 29°$；　(2) $\tan 136°$；　(3) $\sqrt{25.4}$；　(4) $\ln 1.01$.

7. 半径为 10 cm 的金属圆片加热后，半径增加了 0.05 cm，问面积大约增加了多少？

8. 已知当 $\Delta x = 0.5$ 时，函数 $y = f(e^{-2x})$ 在 $x = 2$ 处的微分为 -0.1，求 $f'(e^{-4})$ 的值.

测　试　题

1. 判断题.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可微.　(　　)

(2) 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $[f(x_0)]' = f'(x_0)$.　(　　)

(3) $x dx = d(x^2)$.　(　　)

(4) $\sin x dx = d(\cos x)$.　(　　)

(5) 设 $y = \sin^2(2-3x)$，则 $y' = 2\sin(2-3x)\cos(2-3x)$.　(　　)

2. 选择题.

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) < 0$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的倾斜角是(　　).

A. $0°$　B. $90°$　C. 锐角　D. 钝角

(2) 已知 $f(x) = \sin(ax^2)$，则 $f'(a) = $ (　　).

A. $\cos ax^2$　B. $2a^2\cos a^3$　C. $a^2\cos ax^2$　D. $a^2\cos a^3$

(3) 设 $y = \sin x + \cos\frac{\pi}{6}$，则 $y' = $ (　　).

A. $\sin x$　B. $\cos x$　C. $\cos x - \sin\frac{\pi}{6}$　D. $\cos x + \sin\frac{\pi}{6}$

(4) 下列导项中正确的是(　　).

A. $(\tan 2x)' = \sec^2 2x$　B. $(a^x)' = xa^{x-1}$

C. $\left(\cos\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$　D. $(\cot\sqrt{x})' = -\frac{1}{x+1}$

(5) 若等式 d________ $= -2xe^{-x^2}dx$ 成立，那么应填入的函数是(　　).

A. $-2xe^{-x^2} + C$　B. $-e^{x^2} + C$

C. $e^{-x^2} + C$　D. $2xe^{-x^2} + C$

(6) 设 $z=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　).

A. $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　　B. $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

C. $\dfrac{1}{x^2+y^2}$　　D. $\dfrac{|x|}{x^2+y^2}$

(7) 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,则下列式子中正确的是(　　).

A. $f(x,\dfrac{y}{x})=f(x,y)$　　B. $f(y,x)=f(x,y)$

C. $f(x+y,x-y)=f(x,y)$　　D. $f(x,-y)=f(x,y)$

3. 填空题.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为________,法线方程为________.

(2) $y=\ln\sqrt{3}$,则 $y'=$________.

(3) 设 $f(x)=\ln(1+x)$,则 $f''(0)=$________.

(4) 若 $s=a\cos(2\omega t+\varphi)$,那么,$s'_t=$________.

(5) 设 $z=xe^y$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(6) 设 $z=x^3+xy^2$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$________.

(7) 已知 $f(x,x+y)=x^2+xy$,则$\dfrac{\partial f}{\partial x}=$________.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{2x^2-3x+\sqrt{x}-1}{x^2}$;　　(2) $y=\sin^3x-\sin 3x$;

(3) $y=e^x\cos^3x\ln x$;　　(4) $y=x\sin(\ln x-\dfrac{\pi}{4})$;

(5) $y=3^{\frac{x}{\tan x}}+\arcsin x^2$;　　(6) $y=\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

5. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=x\sqrt{1-x}$;　　(2) $y=\dfrac{e^x}{x^2}$;

(3) $y=x^3\ln x$;　　(4) $y=x^a\sin x$.

6. 求下列隐函数的导数.

(1) $\cos(xy)=x$;　　(2) $y=\dfrac{1}{2}+xe^y$;

(3) $\frac{x}{y}-\ln x=1$；　　$x^y=y^x$.

7.求下列函数的微分.

(1)$y=(2x^3-3x^2+3)(\sqrt{x}+\frac{1}{x})$；　(2)$y=\cos^3 x^2$；

(3)$y=\frac{x^3+1}{x^3-1}$.

8.求下列函数的一阶偏导数.

(1)$z=x^2y^2+\frac{x}{y}$；　(2)$z=\ln(x+y^2)$；

(3)$z=(1+x)^y$；　(4)$z=\sin xy$；

(5)$z=(2a+y)^x$；　(6)$z=\sqrt{xy}$.

9.求下列函数的二阶偏导数.

(1)$z=xy^2+x^3y$　(2)$u=x\ln(x+y)$.

10.求下列函数的近似值.

(1) $\sqrt[4]{80}$；　(2)$\ln 1.002$.

11.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在.

12.已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

13.求曲线$\begin{cases}x=2e^t,\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程和法线方程.

14.已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$，l 为摆长(单位:cm).设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少？

第四章　微分中值定理及导数的应用

第一节　微分中值定理

定理 1　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在区间两端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

定理 2　设函数 $y=f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

推论 1　若在开区间(a,b)内恒有 $f'(x)=0$，则在(a,b)内 $f(x)$ 恒为常数.

推论 2　若在开区间(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内恒有 $f(x)=g(x)+C$(C 为常数).

定理 3　设 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导.

(3) 在(a,b)内任何一点处 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

练习 4.1

1. 验证罗尔定理对 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在$[-1,2]$上的正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对 $f(x)=\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的正确性.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(1)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

4. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

6. 证明下列不等式成立.

(1) $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$；

(2) $|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

8. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

9. 证明方程 $x^3+x+c=0$ 至多有一个实根(c 为任意常数).

第二节　洛必达法则

定理 1(洛必达法则)　若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某邻域内(点 x_0 可除外)可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 为有限数，也可为 $+\infty$ 或 $-\infty$)，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

一、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

定理 2　设 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，且 $F'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或 ∞)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或 ∞).

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 3　设 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导且 $F'(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，

$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A(\text{或 }\infty)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A(\text{或 }\infty)$.

三、其他类型未定式($0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$)

把 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型转化为 $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,再利用洛必达法则计算,常用的方法有取倒数、通分和取指数形式.

练习 4.2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^4+4x^2-5x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x\sin^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{x\tan^3 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\ln(1+x)$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\ln(x+1)}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{x^{\frac{1}{2}}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

4. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 不能用洛必达法则求得,试用其他方法求极限.

5. 验证极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 不能用洛必达法则求得，试用其他方法求极限.

第三节　函数的单调性、极值与最值

一、函数单调性判别法

一个函数在某个区间内单调增减性的变化规律，是研究函数图形时首先要考虑的问题，以前我们已经给出了函数单调性的定义，现在介绍利用函数的导数判定函数单调性的方法.

定理 1　设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则

(1) 在 (a,b) 内，若 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；

(2) 在 (a,b) 内，若 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

讨论函数 $f(x)$ 的严格单调性可按下列步骤进行：

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 令 $f'(x) = 0$，求出 $f(x)$ 的驻点和 $f'(x)$ 不存在的点；

(3) 用上述各点将定义域分成若干个开区间；

(4) 判别 $f'(x)$ 在每个开区间内的符号，即可确定 $f(x)$ 在各区间上的单调性.

二、函数的极值

$f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 有定义，若对于任意 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$），那么称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值(极小值)，并称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点(极小值点).

注：极大值不一定比极小值大.

三、函数极值的判定及求法

定理 2　若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0) = 0$.

通常把 $f'(x) = 0$ 的点称为 $f(x)$ 的驻点.

注：可导函数 $f(x)$ 的极值点一定是它的驻点，但驻点不一定是极值点.

函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值.

定理 3　$f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

(1) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 若当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

(3) 若当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

定理 4　设 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

求函数 $f(x)$ 极值的一般步骤如下：

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域.

(2) 求 $f(x)$ 的导数，确定驻点和导数不存在的点.

(3) 用极值判别法(一) 或(二) 确定函数极值点.

(4) 把极值点代入 $f(x)$，求出并指出极大(小) 值.

四、函数的最值

只要求出函数 $f(x)$ 在开区间(a,b) 内的所有驻点和不可导点，把这些点的函数值以及 $f(a)$，$f(b)$ 加以比较，其中最大的为函数的最大值，最小的为函数的最小值.

练习 4.3

1. 确定下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=2x^3-9x^2$；　　(2) $f(x)=2x^3-\ln x$；

(3) $f(x)=(x-1)(x+1)^3$；　　(4) $f(x)=e^{-x^2}$.

2. 证明下列不等式.

(1) 当 $x>1$ 时，$4\sqrt{x}>5-\dfrac{1}{x}$；

(2) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}<\sin x<x$.

3. 求下列函数的极值.

(1) $y=4x^3-3x^2-6x+2$；　　(2) $y=x-\ln(1+x)$；

(3) $y=x+\tan x$；　　(4) $y=2e^x+e^{-x}$；

(5) $y=x+\sqrt{1-x}$；　　(6) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

4. 利用极值判别法 Ⅱ 判断下列函数的极值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$；　　(2) $f(x)=(x-3)^2(x-2)$；

(3) $f(x)=2x-\ln(4x)^2$；　　(4) $f(x)=2x^2-x^4$.

5. 求下列函数的最值.

(1) $f(x)=x+\sqrt{1-x}, x\in[-5,1]$;

(2) $f(x)=x^3-3x+3, x\in[-3,2]$;

(3) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7, x\in[1,4]$;

(4) $f(x)=x^2-\dfrac{54}{x}, x\in[-6,-1]$.

6. 欲用长 6 m 的铝合金料加工一“日”字形窗框,问它的长和宽为多少时,才能使窗户面积最大?最大面积是多少?

7. 某电视机厂生产电视机可得利润为 $L(x)=5000+x-0.0001x^2$(元). 问生产多少台时可取得最大利润?

8. 若造一圆柱形油罐,体积为 V,问底半径 r 和高 h 等于多少时,才能使表面积最小?

9. 有一长为 a 的铁丝,将其剪成两段,围成两个正方形,怎样剪能使两个正方形面积之和最小.

第四节　多元函数的极值和最值

一、二元函数的极值

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义,如果对于此邻域内任何异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的点 (x,y),都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 成立,则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极大值(或极小值)$f(x_0,y_0)$. 极大值和极小值统称为极值,使函数取得极值的点 (x_0,y_0) 称为极值点。

定理 1(极值存在的必要条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值,且函数在该点的一阶偏导数存在,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

证　因为点 (x_0,y_0) 是函数 $f(x,y)$ 的极值点,若固定 $f(x,y)$ 中的变量 $y=y_0$,则 $z=f(x,y_0)$ 是一个一元函数,且在 $x=x_0$ 处取得极值。由一元函数极值的必要条件知 $f_x(x_0,y_0)=0$,同理可证 $f_y(x_0,y_0)=0$。

使 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x,y) 称为函数的驻点。可导函数的极值点必为驻点,但是函数的驻点却不一定是极值点。例如,函数 $z=x^2-y^2$(双曲抛物面),点 $(0,0)$ 虽是驻点,但却不是它的极值点。

定理 2(极值存在的充分条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内具有二阶连续偏导数,且点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数的驻点,即 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. 若记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_xy(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$,则

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，$P_0(x_0,y_0)$ 是极值点，且若 $A<0$（或 $C<0$），点 $P_0(x_0,y_0)$ 为极大值点；若 $A>0$（或 $C>0$），点 $P_0(x_0,y_0)$ 为极小值点；

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为非极值点；

(3) 当 $B^2-AC=0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 可能是极值点也可能不是极值点.

二、二元函数的最大值与最小值

与一元函数相类似，对于有界闭区域上连续的二元函数，一定能在该区域上取得最大值和最小值.

求最大值与最小值的一般方法是：将可微函数在闭区域内所有驻点的函数值与在边界上的最大值和最小值相比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

对于实际问题中的最值问题，往往从问题本身能断定它的最大值和最小值一定存在，且在定义区域内部取得，这时，如果函数在定义区域内有唯一驻点，则该驻点的函数值就是函数的最大值或最小值. 因此求实际问题中的最值问题的步骤是：

(1) 根据实际问题建立函数关系，确定其定义域；

(2) 求出驻点；

(3) 结合实际意义判定最大、最小值.

求函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，用拉格朗日乘数法的具体求解步骤如下：

(1) 构造辅助函数（称为拉格朗日函数）

$$L=L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

其中 λ 为待定常数，称为拉格朗日乘数，将原条件极值问题化为求三元函数 $L(x,y,\lambda)$ 的无条件极值问题；

(2) 由无条件极值问题的极值必要条件有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

联立求解这三个方程，解出可能的极值点 (x,y) 和乘数 λ；

(3) 判别求出的 (x,y) 是否为极值点，通常由实际问题的实际意义判定.

对于多于两个自变量的函数或多于一个约束条件的情形也有类似的结果.

练习 4.4

1. 求下列函数的极值.

(1) $z=4(x-y)-x^2-y^2$；　　(2) $z=9xy-x^3-y^3$；

(3) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$；　　(4) $z=(6x-x^2)(4y-y^2)$.

2. 将正数 a 表示为 3 个正数的和，若使它们的乘积最大，求此 3 个数.

3. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在附加条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 下的极值.

4. 从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求出周长最大的那个直角三角形.

5. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积最大?

6. 某工厂要建造一座长方体形状的厂房，其体积为 150 000 m^3，已知前墙和屋顶的每单位面积的造价分别是其他墙身造价的 3 倍和 1.5 倍，问厂房前墙的长度和厂房的高度为多少时，厂房的造价最小?(墙厚忽略不计)

7. 有一块铁皮，宽为 24 cm，要把它的两边折起来做成一个等腰梯形断面水槽，如图 4-4-1 所示，为使此槽中水的流量最大，即槽的横截面积最大，求倾角 α 及折起每边的长度 x.

图 4-4-1

8. 某工厂在生产某种产品中要使用甲、乙两种原料，已知甲和乙两种原料分别使用 x 单位和 y 单位可生产 u 单位的产品，$u=8xy+32x+40y-4x^2-6y^2$，且甲种原料单价为 10 元，乙种原料单价为 4 元，单位产品的售价为 40 元，求该工厂在生产这个产品上最大的利润.

第五节　曲线的凹凸性与拐点

定义 1　若在某区间 (a,b) 内曲线段总位于其上任一点处切线的上方，则称曲线段在 (a,b) 内是向上凹的(简称上凹)；若曲线段总位于其上任一点处切线的下方，则称该曲线段在 (a,b) 内是向下凹，也称凸的)(如图 4-5-1 所示).

从图 4-5-1 可以看出，曲线段弧 AB 是下凹的，弧 BC 是上凹的.

下面我们给出曲线凹向的判别法.

定理　设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内具有二阶导数.

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是向上凹的；

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是向下凹的.

若把定理 1 中的区间改为无穷区间，结论仍然成立.(定理证明略)

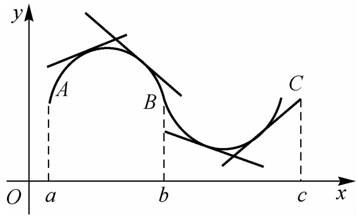

图 4-5-1

定义 2　若连续曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 是曲线向上凹与向下凹的分界点，则称 P 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

由于拐点是曲线不同凹向的分界点，所以拐点两侧近旁 $f''(x)$ 必然异号. 因此曲线拐点的横坐标 x_0 只可能是使 $f''(x)=0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点. 从而可得拐点的求法：

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(1) 先求出 $f''(x)$，找出在 (a,b) 内 $f''(x)=0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点；

(2) 用上述各点按照从小到大依次将 (a,b) 分成小区间，再在每个小区间上考察 $f''(x)$ 的符号；

(3) 若 $f''(x)$ 在某点 x_i 两侧近旁异号，则点 $(x_i,f(x_i))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，否则不是拐点.

练习 4.5

1. 求下列函数图形的凹凸区间和拐点.

(1) $y=xe^{-x}$；　　　　(2) $y=\ln(x^3+1)$；

(3) $y=x^4(12\ln x-7)$；　　　　(4) $y=2x^3+3x^2-12x+14$.

2. a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

3. 已知函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 有拐点 $(-1,4)$，且在点 $x=0$ 处有极大值 2，求 a,b,c,d 的值.

4. 已知函数 $y=x^3-ax^2-9x+4$ 在 $x=1$ 处有拐点，试确定系数 a，并求曲线的拐点坐标和凹凸区间.

5. 试确定 a,b，使 $y=ax^3+bx^2$ 在 $(1,3)$ 处有拐点.

6. 求曲线 $y=x^3+3x^2-x-1$ 的凹凸区间及拐点坐标.

第六节　简单函数图象的描绘

一、曲线的渐近线

定义 1　若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线(如图 4-6-1 所示).

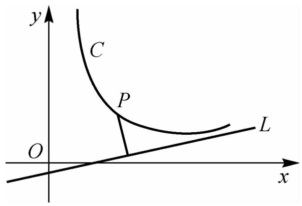

图 4-6-1

并不是任何曲线都有渐近线，下面分本种情况作以介绍.

1.斜渐近线：

定理　若 $y=f(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$,

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$,

则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

证明略.

2.垂直渐近线：

定义 2　若 $x\to C$ 时(有时仅当 $x\to C^{+}$ 或 $x\to C^{-}$)，有 $f(x)\to\infty$，则称直线 $x=C$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线(也叫铅直渐近线)(其中 C 为常数).

3.水平渐近线：

定义 3　若当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to C$(C 为常数)，则称曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=C$.

二、函数图象的描绘

为了更准确、更全面的描绘平面曲线，我们必须确定出反映曲线主要特征的点的位置及曲线的凹向等，具体说来可按以下步骤进行操作：

第一步　确定函数的定义域及值域，讨论函数的一些基本性质，如奇偶性，对称性和周期性等；

第二步　确定函数的单调区间、极值点、拐点以及凹凸区间；

第三步　考察曲线的渐近线；

第四步　考察曲线与坐标轴的交点；

第五步　将以上考察结果汇总成表；

第六步　根据上述表格讨论描点，用圆滑的弧线连点绘图.

练习 4.6

1.求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$；　　(2) $y=e^{\frac{1}{x}}-1$；

(3) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $y=2x+\arctan\dfrac{x}{2}$；

(5) $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

2.描绘下列函数的图象.

(1) $y=2-x-x^2$；　　(2) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2$；

(3) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

测　试　题

1.填空题.

(1) 函数 $y=\dfrac{3}{2x^2+1}$ 在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔中值定理条件的 $\xi=$ ________；

(2) 函数 $y=2x^2-x+1$ 在区间 $[-1,3]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi=$ ________；

(3) 函数 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上满足柯西中值定理条件的 $\xi=$ ________；

(4) 如果 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)$ 是________或________；

(5) 若可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f'(x_0)=0$，而二阶导数 $f''(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极________值；

(6) 函数 $y=\sin x-x$ 在定义域内单调________；

(7) 函数 $y=xe^{-x^2}$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为________；

(8) 曲线 $y=x^3-3x+1$ 的拐点为________；

(9) 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在区间________上是凸的；

(10) 曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^2}{x(x-1)}$ 的水平渐近线为________；

(11) 函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的驻点为________.

2. 选择题.

(1) $f(x)=x-\sin x$ 在闭区间$[0,1]$上的最大值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. $1-\sin 1$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(2) 下列函数中，在区间$[1,\mathrm{e}]$上满足拉格朗日中值定理条件提(　　).

A. $\ln\ln x$　　B. $\ln x$　　C. $\dfrac{1}{\ln x}$　　D. $\ln(2-x)$

(3) 函数 $y=x-\ln(1+x)$ 的单调减少区间是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

(4) 若 $y=x^2-x$，则函数在区间$[0,1]$的最大值是(　　).

A. 0　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

(5) 函数 $y=(x+1)^2$ 在区间$(-2,2)$上的极小值点是(　　).

A. 0　　B. -1　　C. $(0,1)$　　D. $(1,4)$

(6) $y=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 2

(7) 下列极限可利用洛必达法则的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3-x}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin 2x}{\sin x}$

(8) 在区间$(0,+\infty)$内 $y=1-\ln x$ 的图象是(　　).

A. 凹的　　B. 凸的

C. 有凸有凹的　　D. 关于 x 轴对称

(9) 方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-1$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有实根的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(10) 函数 $y=x-\sin x$ 在区间$(-2\pi,2\pi)$内的拐点个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(11) 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点为(　　).

A. $(1,0)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-3,0)$　　D. $(-3,2)$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+y+\frac{x^2}{2}=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的极值点.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}$.

5. 求曲线 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的凹凸区间和拐点.

6. 设 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，试求此函数在拐点处的切线方程.

7. 某厂生产某种产品，其固定成本为 3 万元，每生产一百件产品，成本增加 2 万元，其收入 R(单位：万元) 是产量 x(单位：百件) 的函数：$R=5x-\frac{1}{2}x^2$，求达到最大利润时的产量.

8. 验证函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足拉格朗日中值定理的正确性.

9. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，试确定系数 a,b，并求出 $y=f(x)$ 所有的极大值，极小值，拐点，且描绘图象.

10. $x>0$ 时，证明：$e^x-1-x>1-\cos x$.

11. 求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值点.

第五章　不 定 积 分

第一节　不定积分的概念和性质

一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数：如果 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $F'(x)=f(x)$ 或者 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，那么 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么 $f(x)$ 在该区间上的原函数一定存在.

定理 2　如果函数 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$，则它一定有无穷多个原函数，并且对任意的常数 C，形如 $F(x)+C$ 的函数族，构成 $f(x)$ 的全体原函数.

注：由定理知，一个函数的任意两个原函数之差是一个常数.

2. 不定积分：函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达形式 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量.

二、不定积分的性质

性质 1　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，由积分的定义知，积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系：

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

性质 2　两个函数代数和的不定积分，等于各个函数不定积分的代数和，即

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

这一性质可以推广到有限个函数代数和的情形.

性质 3　被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面来，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,(k\neq 0,k\text{ 为常数}).$$

三、基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 为常数）

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

(4) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$

(5) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x = \int \sec^{2}x\mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x = \int \csc^{2}x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

以上 13 个公式是积分法的基础，必须熟记，不仅要记住右端结果，还要熟悉左端被积函数的形式.

四、直接积分法

直接或通过恒等变形（包括代数和三角变形）再利用基本积分公式与不定积分的性质求不定积分的方法，称为直接积分法.

练习 5.1

1.求下列函数的一个原函数.

(1) $f(x)=3x^2$；　　(2) $f(x)=\sin 5x$；

(3) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$；　　(4) $f(x)=e^{3x}$.

2.验证下列函数是同一函数的原函数.

(1) $y=\ln x, y=\ln(ax)(a>0), y=\ln(bx)+C(b>0)$；

(2) $y=(e^x+e^{-x})^2, y=(e^x-e^{-x})^2$；

(3) $y=-\dfrac{1}{2}\cos^2 x, y=\dfrac{1}{2}\sin^2 x, y=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$；

(4) $y=\arcsin(2x-1), y=\arccos(1-2x), y=2\arcsin\sqrt{x}$.

3.求下列不定积分.

(1) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$；　　(2) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $\int \dfrac{(1-x)^3}{\sqrt{x}}dx$；　　(4) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$；

(5) $\int \dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$；　　(6) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$；

(7) $\int \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^x}dx$；　　(8) $\int \sec x(\sec x-\tan x)dx$；

(9) $\int \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}dx$；　　(10) $\int \dfrac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$；

(11) $\int \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$；　　(12) $\int \dfrac{(x+3)^3}{x^2}dx$；

(13) $\int \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$；　　(14) $\int \dfrac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$；

(15) $\int \dfrac{1+2x^2}{x^2(x^2+1)}dx$；　　(16) $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$；

(17) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$；　　(18) $\int \cos^2\dfrac{x}{2}dx$.

4.一曲线通过点(1,6)和(2,−9),且在任意一点处的切线斜率与 x^3 成正比,求该曲线的方程.

5.一物体由静止开始运动,经过 t(s) 后速度为 $2t$(m/s).问:

(1) 在 2 s 后,物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走过 36 m 需多少时间?

6. $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$ 与 $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ 是否矛盾?请说明理由.

第二节　换元积分法

一、第一换元积分法(凑微分法)

1. 设 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{\text{令 } u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C \xlongequal{u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C.$$

2. 一些常用的微分形式:

(1) $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}(ax+b)\ (a\neq 0, b\in \mathbf{R})$;

(2) $x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)a}\mathrm{d}(ax^{n+1}+b)$,如:$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$;$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$;$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\frac{1}{x})$;

(3) 其他类型的微分变形,如 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$,$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$,$\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$;$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$;$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$;$\csc^2\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$;$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arcsin x)$ $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arctan x)$

二、第二换元积分法

被积函数 $f(x)$ 含 $\sqrt{ax+b}$,$\sqrt[3]{ax+b}$:分别含 $\sqrt{ax+b} = t$,$\sqrt[3]{ax+b} = t$;

三角函数代换:被积函数 $f(x)$ 含根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 做代换 $x = a\sin t$;

被积函数 $f(x)$ 含根式 $\sqrt{x^2+a^2}$ 做代换 $x = a\tan t$;

被积函数 $f(x)$ 含根式 $\sqrt{x^2-a^2}$ 做代换 $x = a\sec t$.

倒数代换:$x = \frac{1}{t}$.

指数代换:$a^x = t$.

练习 5.2

1. 将适当的数填入括号内,使等式成立.

(1)$dx=(\quad)d(6x)$;

(2)$dx=(\quad)d(7x-3)$;

(3)$xdx=(\quad)d(5x^2)$;

(4)$xdx=(\quad)d(x^2)$;

(5)$x^3dx=(\quad)d(3x^4-2)$;

(6)$e^{2x}dx=(\quad)de^{2x}$;

(7)$\sin\frac{3}{2}xdx=(\quad)d\cos\frac{3}{2}x$;

(8)$\frac{dx}{x}(\quad)d(5\ln|x|)$;

(9)$\frac{dx}{1+9x^2}=(\quad)d(\arctan 3x)$;

(10)$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(\quad)d(1-\arcsin x)$.

2. 求下列不定积分.

(1)$\int\sqrt{3+4x}dx$;

(2)$\int\cos(2x-3)dx$;

(3)$\int e^{-5x}dx$;

(4)$\int(3x+1)^3dx$;

(5)$\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx$;

(6)$\int\sqrt{2-3x}dx$.

3. 求下列不定积分.

(1)$\int xe^{x^2}dx$;

(2)$\int\sin^3x\cos xdx$;

(3)$\int\tan xdx$;

(4)$\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$;

(5)$\int\frac{1}{1+e^x}dx$;

(6)$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

(7)$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(8)$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

(9)$\int\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}dx$;

(10)$\int e^{\tan x}\sec^2xdx$;

(11)$\int\cos^3xdx$;

(12)$\int\frac{1}{x}\ln^3xdx$;

(13)$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

(14)$\int\frac{x^2}{1+x}dx$;

(15)$\int(\tan^2x+\tan^4x)dx$.

4. 求下列不定积分.

(1) $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{1}{1\ \sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int\frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{6x+7}{3x^2+7x+11}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\mathrm{d}x$.

6. 设某函数当 $x=-1$ 时有极大值为 4，又知道这个函数的导数具有形状 $y=3x^2+bx+c$，求此函数.

第三节　分部积分法

当被积函数是两种不同类型函数的乘积时，往往要采用下面的积分方法——分部积分法来解决.

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，根据乘积微分公式有

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$$

移项得

$$v\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$$

两边积分得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

这个公式称为分部积分公式，应用这一公式求不定积分的方法称为分部积分法.

对于被积函数是 $x^n\ln x$，$x^n\cos x$，$x^n\arcsin x$，$x^n\arctan x$，$x^n\mathrm{e}^x$，$\mathrm{e}^x\sin x$ 等类型的不定积分，都适合应用分部积分法.

练习 5.3

1. 求下列积分.

(1) $\int \ln \frac{x}{2} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\cos x \mathrm{d}x$；

(3) $\int x^2 \arctan x \mathrm{d}x$；　　(4) $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$；

(5) $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$；　　(6) $\int \arcsin x \mathrm{d}x$；

(7) $\int x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$；　　(8) $\int x\cos^2 x \mathrm{d}x$.

2. 已知 $\sin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf(x)\mathrm{d}x$.

3. 求下列不定积分.

(1) $\int x\cos \frac{x}{2} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{1}{x^2}\arctan x \mathrm{d}x$；

(3) $\int x\tan^2 x \mathrm{d}x$；　　(4) $\int x(2-x)^4 \mathrm{d}x$；

(5) $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$；　　(6) $\int x\sin x\cos x \mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分.

(1) $\int x\cos^2 x \mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x \mathrm{d}x$；

(3) $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$；　　(4) $\int \mathrm{e}^{-2x}\sin \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分.

(1) $\int x\mathrm{e}^{10x} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int xf''(x) \mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$；　　(4) $\int \mathrm{e}^x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

6. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，证明：$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$.

第四节　有理函数的积分

讨论 1　当分母 $Q(x)$ 含有单因式 $(x-a)$ 时，这时分解式中对应有一项 $\frac{A}{x-a}$，其中 A 为待定系数.

例如，$R(x)=\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

为确定系数 A,B,C，将上式两边同乘以 $x(x-1)(x+2)$，可得

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

因为这是一个恒等式，将任何 x 值代入都相等. 故可令

$x=0$，得 $3=-2A$，即 $A=-\dfrac{3}{2}$.

类似地，令 $x=1$，得 $B=\dfrac{5}{3}$；令 $x=-2$，得 $C=-\dfrac{1}{6}$.

于是得到

$$R(x)=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{-\dfrac{3}{2}}{x}+\frac{\dfrac{5}{3}}{x-1}+\frac{-\dfrac{1}{6}}{x+2}.$$

讨论 2　当分母 $Q(x)$ 含有重因式 $(x-a)^n$ 时，这时部分分式中相应有 n 个项：

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}.$$

例如，$\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}$.

为了确定系数 A,B,C，将上式两边同乘以 $x(x-1)^2$，得

$$x^2+1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$$

令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $B=2$；令 $x=2$，$5=A+2B+2C$，代入已求得的 A,B 的值，得 $C=0$.

所以 $\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

讨论 3　当分母 $Q(x)$ 中含质因式 x^2+px+q 时，这时部分分式中相应有一项 $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

例如，$\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+3}$. 将上式两边同乘以 $(x-1)(x^2+x+3)$，得

$$x+4=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-1)$$

令 $x=1$，得 $A=1$；令 $x=0$，得 $4=3A-C$，即 $C=-1$；令 $x=2$，得 $6=9A+2B+C$，即 $B=-1$.

所以，$\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-x-1}{x^2+x+3}$.

练习 5.4

求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$；

(9) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$；

(10) $\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$；

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$；

(13) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(14) $\int \frac{1+x^4}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

测　试　题

1. 填空题.

(1) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int x\mathrm{e}^{-x^2}f(\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x=$ ________.

(2) 已知一个函数 $f(x)$ 满足 $f'(\sqrt{x})=1-x$，则 $f(x)=$ ________.

(3) $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(4) 已知一个函数的导数 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且当 $x=1$ 时，该函数值为 $\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)=$ ________.

(5) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x=$ ________.

2. 选择题.

(1) 若 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都是 x 的可微函数，则 $\int u\mathrm{d}v=$ (　　).

A. $uv-\int vu'\mathrm{d}x$　　B. $uv-\int vu'\mathrm{d}u$

C. $uv-\int v'\mathrm{d}u$　　D. $uv-\int uv'\mathrm{d}u$

(2) 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=($　　$)$.

A. e^x　　B. $x\ln x$　　C. $\frac{1}{x}$　　D. $-\frac{1}{x^2}$

(3) 若 $\int xf(x)\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x$，则 $f(x)=($　　$)$.

A. $\sin x$　　B. $\frac{\sin x}{x}$

C. $\cos x$　　D. $\frac{\cos x}{x}$

(4) 已知曲线上任一点的二阶导数 $y''=6x$，且在曲线上 $(0,-2)$ 处的切线为 $2x-3y-6=0$，则这条曲线的方程为(　　).

A. $y=x^3$　　B. $y=x^3-2x-2$

C. $3x^3+2x-3y-6=0$　　D. $3x^3+2x-y-6=0$

(5) 计算 $\int f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的结果正确的是(　　).

A. $f\left(-\frac{1}{x}\right)+C$　　B. $-f\left(-\frac{1}{x}\right)+C$

C. $f\left(\frac{1}{x}\right)+C$　　D. $-f\left(\frac{1}{x}\right)+C$

3. 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x-(\arctan x)^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\,(a>0)$；　　(10) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；　　(12) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$；　　(14) $\int \frac{(2\ln x+1)^2}{x}\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\mathrm{d}x$；　　(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$；

(17) $\int \dfrac{dx}{16-x^4}$；　　(18) $\int \dfrac{1}{9+4x^2}dx$；

(19) $\int (2x-3)^{50}dx$；　　(20) $\int \dfrac{\sin(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}}dt$；

(21) $\int xe^{-3x^2+2}dx$；　　(22) $\int x^4\cos x^5 dx$；

(23) $\int \dfrac{1}{\sin x\cos x}dx$；　　(24) $\int \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$；

(25) $\int x\cos x dx$；　　(26) $\int te^{-2t}dt$；

(27) $\int e^{-x}\cos x dx$；　　(28) $\int e^{-2x}\sin\dfrac{x}{2}dx$；

(29) $\int \dfrac{\ln^3 x}{x^2}dx$；　　(30) $\int e^x\sin^2 x dx$.

4.一曲线过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求曲线方程.

5.一物体由静止开始做直线运动，经 t(s)后速度为 $3t^2$(m/s).问：

(1)经 3 s 后物体离开出发点的距离是多少？

(2)物体走完 360 m 需要多少时间？

6.证明：函数 $\arcsin(2x-1)$，$\arccos(1-2x)$，$2\arcsin\sqrt{x}$及 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$都是$\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$的原函数.

7.在下列各式等号右端空白处填入适当的系数，使等式成立.

(1) $dx=$________ $d(3x+1)$；　　(2) $xdx=$________ $d3x^2$；

(3) $x^3dx=$________ $d(4-3x^4)$；　　(4) $e^{3x}dx=$________ de^{3x}；

(5) $\dfrac{1}{x}dx=$________ $d(3\ln|x|)$；　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$________ $dx=d(1+\arcsin x)$.

第六章　定积分及应用

第一节　定积分的概念

一、定积分问题举例

(一)曲边梯形面积

1. 定义：$y=f(x)$在$[a,b]$上非负、连续，由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$所围成的图形称为曲边梯形.

2. 求面积：

(1)分割：在$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点，过各分点做 x 轴的垂线，把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形；

(2)取近似：在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，第 i 个窄曲边梯形的面积 ΔA_i 用与它同底，高为 $f(\xi_i)$的矩形面积近似代替，即 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$；

(3)求和：$A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

(4) 取极限 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，$\lambda = \max\Delta x_i (i = 1,2,\cdots,n)$.

注：实质是以“直”代“曲”.

(二) 变速直线运动的路程

(1)分割：把$[T_1,T_2]$分割成 n 份；

(2)取近似：$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$，$\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$；

(3)求和：$s = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$；

(4)取极限：$\lambda = \max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\Delta t_3,\cdots,\Delta t_n\}$，$s = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

二、定积分定义

1. 定义：设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界，在$[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点：

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间$[a,b]$分成 n 个小区间,其长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i = 1,2,\cdots)$,

在每个小区间上任取 ξ_i,做积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1,2,\cdots)$,

做和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,记 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

若$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在,则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,其极限值为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分,记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注:定积分与积分变量无关,只与$[a,b]$和 $f(x)$ 有关.

2. $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的两个充分条件:

定理 1 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

定理 2 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

三、定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示介于 x 轴及直线 $x = a$,$x = b$ 和曲线 $y = f(x)$ 之间的各部分的代数和,如图 6-1-1 所示,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$

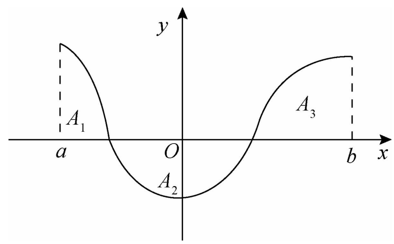

图 6-1-1

练习 6.1

1. 试用定积分表示由曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2 - x^2$ 围成的图形面积.

2. 用定积分表示由 $y = x^2 + 1$,直线 $x = -1$,$x = 2$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A.

3. 根据定积分的几何意义求下列定积分的值.

(1)$\int_{-1}^{1} 2x\mathrm{d}x$;　　(2)$\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x$;

(3)$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$;　　(4)$\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x$;

(5)$\int_0^1 (x + 1)\mathrm{d}x$;　　(6)$\int_a^b \mathrm{d}x$.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间$[-a.a]$上连续,且为奇函数,试根据定积分的几何意义

计算$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

第二节　定积分的性质

性质 1　函数代数和的定积分等于它们定积分的代数和. 即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2　被积函数的常数因子可以提到积分号的外面,即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ 为常数}).$$

性质 3(积分区间的分割性质)　若 $a < c < b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注:这一性质又称区间可加性,可以结合定积分的几何意义来理解.

性质 4(积分的比较性质)　在$[a,b]$上,若 $f(x) \geqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

以上几条性质,均可由定积分定义证得(证明略).

性质 5(积分的估值性质)　设 M,m 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上最大值和最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证　因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$(题设),由性质 4 得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$$

再将常数因子提出,并利用$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$,即可得证.

性质 6(积分中值定理)　如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

练习 6.2

1. 比较下列各组定积分值的大小.

(1)$\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$;　　(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$;

(3)$\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(4)$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

2.估算下列各定积分的值.

(1)$\int_1^3(x^2+1)\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(3)$\int_1^2 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(4)$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$.

3.用定积分的定义计算$\int_1^2 x\mathrm{d}x$.

4.证明 $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^2$.

5.设 $f(x)$ 为区间$[a,b]$上的单调增加的连续函数，证明：

$$f(a)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b)(b-a)$$

第三节　定积分的计算方法

一、变上限的定积分

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且其导数是

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$$

证　当上限 x 获得改变量 Δx 时，函数 $\Phi(x)$ 获得改变量 $\Delta\Phi$，由图 6-3-1 可知，

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

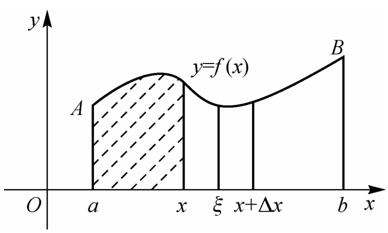

图 6-3-1

由积分中值定理，得 $\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x\quad(\xi\in(x,x+\Delta x))$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$$

再令 $\Delta x \to 0$，从而 $\xi \to x$，由 $f(x)$ 的连续性，得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \to 0} f(\xi) = f(x)$$

由 $\Phi'(x) = f(x)$ 知，$\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，从而有如下推论：

推论 1　连续函数的原函数一定存在.

推论 2　设 $\Phi(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$，$f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)$ 可微，且 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$，则

$$\Phi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

二、牛顿 - 莱布尼茨公式

定理 2　若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

注：牛顿 - 莱布尼茨公式将求定积分问题转化为求原函数问题.

三、定积分的换元法

定理 3　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数；

(2) 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时，$x = \varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

注：(1) 上述定理告诉我们，$\mathrm{d}x$ 可以看做微分记号，将 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$，则 $\mathrm{d}x$ 就为 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

(2) 用 $x = \varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时，积分限也要相应地变为 t 的积分限.

(3) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数 $F(t)$ 后，不必再把 $F(t)$ 变成 x 的函数，直接代入 t 的上下限即可.

四、定积分的分部积分法

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\mathrm{d}x - \int_a^b u'v\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x,$$

即 $\int_a^b uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

练习 6.3

1.求下列导数.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{-x}^{1}(\sin t^2)\,\mathrm{d}t$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{\cos x}\ln t\,\mathrm{d}t$.

2.求下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$；

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}-2)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x}$；

(3) $\displaystyle\mathop{\sin}\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x}$；

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{0}t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x}t(t+\sin t)\,\mathrm{d}t}$.

3.求下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $\displaystyle\int_1^4|x-2|\,\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；

(5) $\displaystyle\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$；

(6) $\displaystyle\int_0^4(\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}t$；

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$；

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$；

(9) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$；

(10) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\,\mathrm{d}x$；

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x-1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，求$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

4.求下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\int_1^3\frac{2x}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$；

(6) $\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{2x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x$；

(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}\,\mathrm{d}y$；

(9) $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$；　(10) $\int_{0}^{5} \frac{x^{3}}{x^{2}+1}dx$；

(11) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$；　(12) $\int_{0}^{3} \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$.

5. 求下列定积分.

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$；　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2x dx$；

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^{3} x dx$；　(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2} x dx$；

(5) $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$；　(6) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^{x}}dx$；

(7) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^{2}+2x+2}$；　(8) $\int_{0}^{\sqrt{2}a} \frac{x}{\sqrt{3a^{2}-x^{2}}}dx$；

(9) $\int_{0}^{a} x^{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx$；　(10) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^{2}\sqrt{1+x^{2}}}dx$.

6. 求下列定积分.

(1) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x dx$；　(2) $\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin 2x dx$；

(3) $\int_{1}^{e} \ln^{3} x dx$；　(4) $\int_{0}^{2\pi} x\cos^{2} x dx$；

(5) $\int_{1}^{e} \sin(\ln x)dx$；　(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$；

(7) $\int_{1}^{e} x\ln x dx$；　(8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^{2}\sin x dx$.

7. 利用函数的奇偶性计算下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{1} (1-x^{2})^{5}\sin^{7} x dx$；　(2) $\int_{-6}^{6} \frac{x dx}{\sqrt{1+e^{x^{2}}}}$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 10x dx$；　(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} xe^{x^{2}}dx$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_{a}^{b} f(x)dx=1$，求 $\int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$.

9. 设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，求 $\int_{0}^{1} xf''(2x)dx$.

第四节　广义积分

一、无穷限的反常积分

$f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续，取 $b>a$，若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则此极限为 $f(x)$ 的反常积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

当极限存在时，称反常积分收敛；当极限不存在时，称反常积分发散.

类似地，$\int_{+\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

均为无穷限的反常积分.

二、无界函数的反常积分

$f(x)$ 在区间$(a,b]$上连续，而在点 a 的右邻域内无界，取 $\varepsilon>0$，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在$(a,b]$上的反常积分. 类似地，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\text{（}f(x)\text{ 在 }b\text{ 的左邻域内无界），}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\text{（}f(x)\text{ 在 }c\text{ 点的邻域内无界）.}$$

以上三种反常积分统称为无界函数的反常积分，又称瑕积分，无界点为瑕点.

练习 6.4

1. 判断下列积分的敛散性，若收敛则计算其值.

(1)$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；

(3)$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；　　(4)$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(5)$\int_2^{+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(6)$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.

2. 判断下列积分的敛散性，若收敛则计算其值.

(1)$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_1^2\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$；　　(4) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^k}}dx$ 收敛？当 k 为何值时，广义积分发散？

4. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(\ln x)^k}}$ 收敛？

5. 若广义积分 $\int_{0}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}dx = 1$，其中 k 为常数，求 k.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \int_{-\infty}^{c} te^{2t}dt$，求 c 值.

7. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，该广义积分发散？又当 k 为何值时，该广义积分取得最小值？

第五节　定积分的应用

一、定积分的微元法

1. 通过微元法计算某个分布区间 $[a,b]$ 上的量 U 时，需要 U 满足：

(1) U 在 $[a,b]$ 上的分布对区间要有可加性；

(2) 对每个分量 ΔU_i，有近似式 $f(\xi_i)\Delta x_i$.

2. 计算 U 的步骤：

(1) 选取积分变量，确定区间 $[a,b]$；

(2) 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，求小区间上 ΔU 的近似值 du；

(3) 求 $U = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

二、定积分在几何上的应用

(一) 平面图形的面积

设平面图形由 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 和直线 $x = a$，$x = b(a < b)$ 围成，$g(x) \leqslant f(x)$，则平面图形面积为 $A = \int_{a}^{b}[f(x) - g(x)]dx$.

(二) 体积

1.平行截面为已知的立体的体积：

设有一物体 V，取定轴为 x，设该立体过点 $x=a$，$x=b$，且垂直于 x 轴的两个平面之间，以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，假定 $A(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，所求体积为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.

2.旋转体体积：

旋转体：一个平面图形绕着它所在平面内的一条直线旋转一周所成的立体称为旋转体.

旋转体可看做由 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成，$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

(三) 平面曲线的弧长

1.曲线由参数方程

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} t\in[\alpha,\beta]$ 给出，$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$；

2.设曲线方程为 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，$S=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$；

3.曲线方程为 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，$r(\theta)$ 与 $r'(\theta)$ 不同时为 0，$r'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

三、定积分在物理上的应用

(一)变力沿直线所做的功

(二)液面对平面薄板的压力

(三)求转动惯量

(四)求平均值

练习 6.5

1.求下列曲线所围成图形的面积.

(1) $x^2+3y^2=6y$ 与直线 $y=x$(两部分都要计算)；

(2) $y=x^2$，$y=(x-2)^2$，$y=0$；

(3) $y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{1}{4}x+1$；

(4) $\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$ 与两坐标轴；

(5) $y=\sin x, x=\dfrac{\pi}{4}, x=\pi$, x 轴；

(6) $y=\sqrt{x}, y=x^2, x=1, x=4$；

(7) $y=x^2$ 与直线 $y=x, y=2x$；

(8) $y=\dfrac{1}{x}$与直线 $y=x, y=2$.

2.求下列图形的面积.

(1) $y=x^2-x+2$ 与通过坐标原点的两条切线所围成的图形；

(2) $y^2=2x$ 与点$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$处的法线所围成的图形.

3.求下列曲线所围成图形的面积.

(1) $r=2a\cos\theta$；　　(2) $r^2=a^2\cos\theta$.

4.求下列曲线所围成图形的面积.

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 $y=0$.

5.计算下列各立体的体积.

(1) $y^2=4x$ 与 $x=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(2) $x^2+(y-5)^2\leqslant 16$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(3) $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$与 x 围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得的旋转体；

(4)摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴围成的图形绕直线 $y=2a$ 旋转所得的旋转体.

6.有一质点按规律 $x=t^3$ 做直线运动,介质阻力与速度成正比,求质点从 $x=0$ 移到 $x=1$ 时,克服介质阻力所做的功.

7.设电流强度 i 可表示为时间 t 的函数 $i=2t+t^2$,那么从 $t=0$ 到 $t=b$ 流过的电荷 Q 为多少?

8.一底为 8 cm,高为 6 cm 的三角形薄片,直立地沉没在水中,它的顶在上,底与水面平行且距水面 3 cm,试求它每面所受的压力.

第六节　二重积分的概念与性质

一、二重积分的概念

1. 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，将区域 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$，其面积分别为 $\Delta б_1,\Delta б_2,\cdots,\Delta б_n$，在每个 $\Delta D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 (ε_i,y_i) 作乘积 $f(\varepsilon_i,y_i)\Delta б_i,i=1,2\cdots,n$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,y_i)\Delta б_i$. 如果当 n 个小区域的直径中最大值 λ 趋于零时，和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б$，即 $\iint\limits_D f(x,y)dб=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(\varepsilon_i,y_i)\Delta б_i$，其中 $f(x,y)$ 叫被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}б$ 称被积表达式，$\mathrm{d}б$ 称面积元素，x 与 y 称积分变量，D 称积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,y_i)\Delta б_i$ 称积分和.

2. 几何意义：当 $f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б$ 在几何上表示以 $z=f(x,y)$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体的体积，即 $V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б$，特别地，若 $f(x,y)=1$，且 D 的面积为 $б$，那么 $\iint\limits_D \mathrm{d}б=б$. 这时可理解为以平面 $z=1$ 为顶，D 为底的平顶柱体的体积，该体积在数值上就等于柱体的底面积.

二、二重积分的性质

性质 1　$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}б=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б$（$k$ 为常数）

性质 2　$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}б=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}б$

性质 3　如果积分区域 D 被一条曲线分为两部分区域 D_1 和 D_2，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}б+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}б$

性质 4　如果在积分区域 D 上恒有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$. 则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б\leqslant$

$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}б$.

性质 5　如果 M 与 m 分别是函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值和最小值，$б$ 是 D 的面积. 那么有 $mб \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б \leqslant Mб$.

性质 6　（二重积分的中值定理）设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，$б$ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ε,y)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}б = f(\varepsilon,y)б$.

练习 6.6

1. 设平面区域 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，根据二重积分的几何意义确定 $\iint\limits_D (2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

2. 利用二重积分的性质，估算下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆形区域 $x^2+y^2 \leqslant 1$；

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆形区域 $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3. 比较二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小.

(1) D 是由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 围成的闭区域；

(2) D 是由圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域.

4. 利用二重积分的几何意义，求二重积分的值.

(1) $\iint\limits_D a-\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2 \leqslant a^2$；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2 \leqslant a^2$；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2 \leqslant 1$.

5. 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点坐标为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$.

第七节　二重积分在直角坐标系中的计算

一、在直角坐标系中计算二重积分

在直角坐标系中，我们用平行于x轴和y轴的直线将区域D分成若干个小矩形，于是面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分就可以写成

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据积分区域 D 的形状，二重积分可分成四种类型：

1. 矩形区域：平面区域 D 由直线 $x=a,x=b(a\leqslant b)$ 与直线 $y=c,y=d(c\leqslant d)$ 所围成，如图 6-7-1 所示，它可以表示成不等式组

$$D:\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases},$$

这时二重积分可化为先对 x 或先对 y 的二次积分来计算，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

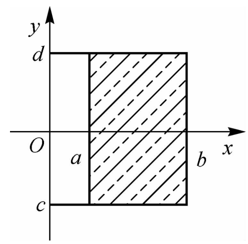

图 6-7-1

2. X 型区域：平面区域 D 由曲线 $y=\varphi_1(x),y=\varphi_2(x)[\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)]$ 及直线 $x=a,x=b$ 所围成(如图 6-7-2 所示)，这样的区域称为 X 型区域. 它可以表示成不等式组

$$D:\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\end{cases},$$

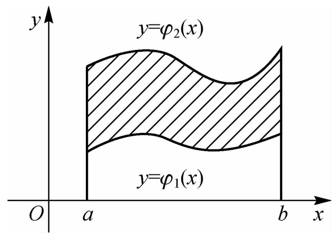

图 6-7-2

其中函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，这样的区域特点是：穿过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两个交点.

3. Y 型区域：平面区域 D 由曲线 $x=\phi_1(y)$，$x=\phi_2(y)[\phi_1(y)\leqslant\phi_2(y)]$ 及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成，如图 6-7-3 所示，这样的区域称为 Y 型区域. Y 型区域可表示成不等式组：

$$D:\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ \phi_1(x)\leqslant y\leqslant\phi_2(x)\end{cases},$$

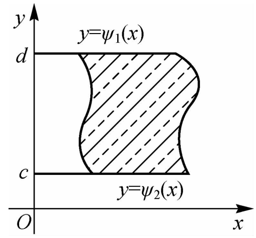

图 6-7-3

其中 $\phi_1(y)$，$\phi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，其特点是：穿过 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界相交不多于两个交点，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这里是把二重积分通过化为先对 x 后对 y 的二次积分来计算的.

4. 即非 X 型，又非 Y 型和矩形区域：如果区域 D 既不是 X 型，又不是 Y 型和矩形区域，那么可以把区域 D 分成几个小区域，如图 6-7-4 所示，每个小区域可看成是 X 型或 Y 型区域.

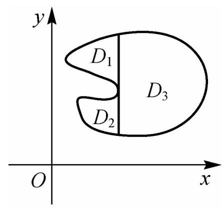

图 6-7-4

在直角坐标系下，二重积分可按以下步骤计算：

第一步　画出积分区域 D；

第二步　确定区域 D 的类型；

第三步　化二重积分为二次积分. 在化二重积分为二次积分时，二次积分的下限必须小于上限，一个二重积分可以采用两个不同的积分次序，但计算时有时繁简程度有别.

练习 6.7

1. 计算下列二次积分.

(1) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy^2\mathrm{d}y$；　　(4) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}r$.

2. 列出函数 $f(x,y)$ 在下列区域上的两个二次积分.

(1) 以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$ 为顶点的三角形；

(2) 由 $y=0$，$x^2+y^2=R^2(R>0)$ 围成的区域；

(3) 由 $y=x^2$，$y=1$ 所包围的区域；

(4) 由 $y=x, y^2=4x$ 所围成的区域.

3. 改变下列二次积分的积分次序.

(1) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$;

(2) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy$;

(3) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy$;

(4) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy$.

4. 画出积分区域,并计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D x e^{xy} dxdy, D: 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0$;

(2) $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$, D 为 $y=2x, y=x, x=2, x=4$ 所围成的区域;

(3) $\iint\limits_D x\sqrt{y} dxdy$, D 为 $y=\sqrt{x}, y=x^2$ 所围成的区域;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy$, D 为 $x^2+y^2 \leqslant 1$;

(5) $\iint\limits_D (x^2-y^2) dxdy$, D 为 $0 \leqslant y \leqslant \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 所围成的区域;

(6) $\iint\limits_D \cos(x+y) dxdy$, D 为 $x=0, y=\pi, y=x$ 所围成的区域.

测 试 题

1. 判断题.

(1) $\int_1^2 \ln x dx < \int_1^2 \ln(1+x) dx$; ( )

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$; ( )

(3) $\left(\int_a^b f(x) dx\right)'_x = f(b)$; ( )

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x} = 1$; ( )

(5) $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x) dx$; ( )

2. 填空题.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(t)\mathrm{d}t =$ ________.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x^3} f(t)\mathrm{d}t =$ ________.

(3) 若 $\int_0^1 (2x+k)\mathrm{d}x = 2$，则 $k =$ ________.

(4) $\int_2^5 |x-3|\mathrm{d}x =$ ________.

(5) 已知 $F'(x) = f(x)$，则 $\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t =$ ________.

(6) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(7) $\int_{-3}^3 \dfrac{x\cos x}{2x^4+x^2+1}\mathrm{d}x =$ ________.

(8) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

(9) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x =$ ________.

(10) 设 $[a,b]$ 上曲线 $y=f(x)$ 位于曲线 $y=g(x)$ 的上方，则由这两条曲线及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成平面图形的面积 $S =$ ________.

(11) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\cos y\mathrm{d}y =$ ________；

(12) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分次序后为________；

(13) 设积分区域 D：$0\leqslant x\leqslant 2$，$-1\leqslant y\leqslant 0$，则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________；

(14) 已知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \pi$，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\cdot f(y)\mathrm{d}y =$ ________.

3. 选择题.

(1) 由曲线 $y=\sin x$ 与直线 $x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

(2) 设 $\int_0^1 x(a-x)\mathrm{d}x = 1$，则常数 $a =$ (　　).

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

(3) 设$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{\pi^2}{4}$　　D. $-\frac{\pi^2}{4}$

(4) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. 不收敛　　B. 1　　C. -1　　D. 0

(5) 由曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 及直线 $x = 0$，$y = 2$ 所围成的平面图形的面积 $S = ($　　$)$.

A. $\int_1^2 \ln y\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

C. $\int_1^{\ln^2} \ln y\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^2 (2 - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

(6) $\iint\limits_D (-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ($　　$)$，其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 3$.

A. -9π　　B. -3π

C. 3π　　D. 9π

(7) 根据二重积分的几何意义，下列不等式中正确的是(　　).

A. $\iint\limits_D (x-1)\mathrm{d}\sigma > 0, D: |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$

B. $\iint\limits_D (x+1)\mathrm{d}\sigma > 0, D: |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$

C. $\iint\limits_D (-x^2 - y^2)\mathrm{d}\sigma > 0, D: x^2 + y^2 \leqslant 1$

D. $\iint\limits_D \ln(x^2 - y^2)\mathrm{d}\sigma > 0, D: |x| + |y| \leqslant 1$

(8) $\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ($　　$)$，其中 $D: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

A. $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$　　B. $\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}$

C. $\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}$　　D. $\frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{4}$

4. 求下列定积分.

(1) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$；

(5) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$；

(7) $\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$；　　(8) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$；

(9) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$；　　(10) $\int_0^1 \frac{x+\arctan x}{1+x^2}dx$；

(11) $\int_3^4 \frac{x^2+x-6}{x-2}dx$；　　(12) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)}dx$；

(13) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos x\sin^2 x}dx$.

5. 求由曲线 $x=y^2$ 与 $x=y+2$ 所围成图形的面积.

6. 求由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成图形绕 y 轴旋转而成旋转体体积.

7. 一个横放着的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水. 设桶底半径为 R，求桶一个端面上所受压力.

8. 半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水平相切，球的密度与水相同，现将球从水中取出，需做多少功？

9. 计算二重积分$\iint\limits_D x\sin y dxdy$，其中 D：$x=1$，$x=2$，$y=0$ 及 $y=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭域.

10. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$ 所围成的区域.

11. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，改变$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ 的积分次序.

12. 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}$，$y=2$，$x=2$ 所围成的闭域.

13. 用二重积分计算由曲线 $y=x^2$ 与 $y=2+x$ 所围成图形的面积.

第七章　常微分方程

第一节　微分方程的概念

一、微分方程的基本概念

(一)微分方程的定义

含有未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.当微分方程中所含的未知函数是一元函数时,这时的微分方程称为常微分方程.在微分方程中,所含未知函数的导数的最高阶数定义为该微分方程的阶数.当微分方程中所含的未知函数及其各阶导数的系数全是一次幂时,微分方程就称为线性微分方程.在线性微分方程中,若未知函数及其各阶导数的系数全是常数,则称这样的微分方程为常系数线性微分方程.

例如,$y'-2y=3x$ 称为一阶常系数线性微分方程,$3y''+2y'+y=\sin x$ 称为二阶常系数线性微分方程.

(二)微分方程的解

如果将函数 $y=y(x)$代入微分方程后能使方程成为恒等式,这个函数就称为该微分方程的解.微分方程的解有两种形式:一种不含任意常数;一种含有任意常数.如果解中包含任意常数,且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同,则称这样的解为微分方程的通解.不含有任意常数的解,称为微分方程的特解.

(三)初始条件与初值问题

在常常情况下,我们用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定通解中任意常数的条件,称为初始条件.因此,一阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,$$

其中 x_0,y_0 是两个已知数;

二阶微分方程的初始条件为

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases},$$

其中，x_0，y_0，y'_0是三个已知数，求微分方程满足初始条件的解的问题，称为初值问题.

(四)线性相关与线性无关

设函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$是定义在区间(a,b)内的函数，若存在两个不全为零的数 k_1，k_2，使得对于(a,b)内的任一 x，恒有

$$k_1y_1+k_2y_2=0$$

成立，则称函数 y_1，y_2 在(a,b)内线性相关，否则称为线性无关，可见，y_1，y_2 线性相关的充分必要条件是$\frac{y_1}{y_2}(y_2\neq 0)$在$(a,b)$内恒为常数. 若$\frac{y_1}{y_2}(y_2\neq 0)$不恒为常数，则 y_1，y_2 线性无关.

二、可分离变量的微分方程

形如

$$y'=f(x)g(y)$$

的微分方程，称为可分离变量的微分方程，其中 $f(x)$，$g(y)$分别是变量 x，y 的连续函数，且 $g(y)\neq 0$. 这类方程的特点是，经过适当运算，可将两个不同变量的函数与微分分离到方程两边. 因此，这类方程的解法如下：

(1)分离变量

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x,$$

(2)两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

(3)求出积分，得通解

$$G(y)=F(x)+C,$$

其中 $G(y)$，$F(x)$分别是$\frac{1}{g(y)}$，$f(x)$的原函数，C 为任意常数.

练习 7.1

1. 指出下列各方程是否为常微分方程，如果是，指出其阶数.

(1) $y'=\frac{1}{x-y}+1$；　　(2) $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(3) $(6x-2y)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}x=0$；　　(4) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$；

(5) $(x^2-1)y''+\cos x=0$；　　(6) $y^{(8)}-1=0$；

(7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial v^2}$.

2.指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解,若是,指出是通解还是特解.

(1) $y''=x^2+y^2, y=\dfrac{1}{x}$;　　(2) $y''-2y'+y=0, y=x^2e^x$;

(3) $xy'=2y, y=Cx^2$;　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+w^2y=0(w>0), y=2\sin wx$.

3.验证函数 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 是方程 $y''+4y=0$ 的通解,并求出满足初始条件$y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=2$ 的特解.

4.验证 $y=Cx^3$ 是方程 $3y-xy'=0$ 的通解(C 为任意常数),并求满足初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{3}$的特解.

5.求下列微分方程的通解.

(1)$xy'-y\ln y=0$;　　(2)$(1+e^x)yy'-e^x=0$;

(3)$2x^2yy'-y^2-1=0$;　　(4)$(1+x^2)y'-y\ln y=0$;

(5)$x^2y'-(x-1)y=0$;　　(6)$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

6.求下列微分方程的特解.

(1)$y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0$;　　(2)$xdy-3ydx=0, y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

7.已知曲线在任一点处的切线斜率等于这个点的纵坐标,且曲线通过点(0,1),求该曲线的方程.

第二节　一阶微分方程

一、齐次方程

形如$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的微分方程称为齐次方程.

对于上述齐次方程,令 $u=\dfrac{y}{x}$,则原方程可化为可分离变量的方程$\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$.

二、一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=Q(x)$(7-1)的方程称为一阶线性微分方程,其中 $p(x)$和 Q

(x)是已知连续函数，当 $Q(x)\equiv 0$ 时，有 $y'+p(x)y=0$(7-2)，此时(7-3)称为一阶齐次线性微分方程.

若 $Q(x)$不恒为零，则称为(一阶)非齐次线性微分方程.

方程(7-2)的通解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，其中 $C=\pm e^{C_1}$ 为任意常数.

对于方程(7-1)，用常数变易法得通解公式为 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}Q(x)\mathrm{d}x+C\right)$.

练习 7.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$；　(2) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$；

(3) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$；　(4) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y$.

2. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy'-y\ln y=0$；　(2) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$；

(3) $3xy'=2y-xy\cos x$；　(4) $y'+y=e^{-2x}$；

(5) $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$；　(6) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x$.

3. 求下列微分方程的通解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=e^{-x}$；　(2) $y'+y\tan x=\sin 2x$；

(3) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$；　(4) $xy'+y=\sin x$；

(5) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3$；　(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{y-x}$.

4. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=8, y|_{x=0}=2$；　(2) $(1+e^x)yy'=e^x, y|_{x=1}=1$；

(3) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sin x, y|_{x=\pi}=1$；　(4) $xy'+y-e^{2x}=0, y|_{x=\frac{1}{2}}=2e$；

(5) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$；　(6) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, y|_{x=1}=2$.

5. 求微分方程 $y'-y=2xe^{2x}$ 在 $y|_{x=0}=1$ 时的特解.

6. 一条曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线斜率等于 $2x+y$，且该曲线经过原点，求曲线的方程.

7. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

(1)曲线在点 $P(x,y)$处的切线斜率等于该点横坐标的平方；

(2)曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

第三节　可降阶的二阶微分方程

一、$y''=f(x)$型微分方程

对于形如 $y''=f(x)$的方程，方程的右端不含有未知函数 y 及 y 的导数，只要对方程两端积分，就可以将方程化为一阶方程，再次积分，就得到方程的解.

二、$y''=f(x,y')$型微分方程

对形如 $y''=f(x,y)$的方程，我们设 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，于是原方程变为 $p'=f(x,p)$，此为关于 x 和 p 的一阶微分方程，设其通解为 $p=g(x,C_1)$（其中 C_1 为任意常数）.

而 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，因此对 $p=g(x,C_1)$ 再次积分，得 $y=\int g(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

三、$y''=f(y,y')$型微分方程.

对形如 $y''=f(x,y')$的方程，令 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是原方程化为形如 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$. 这是关于变量 y 和 p 的一阶微分方程.

求其通解 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(y,C_1)$，对此方程分离变量，得$\frac{\mathrm{d}y}{g(y,C_1)}=\mathrm{d}x$.

对方程两端积分，可求得方程 $y''=f(y,y')$ 的通解为$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y,C_1)}=x+C_2$.

练习 7.3

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''=\frac{1}{1+x^2}$；　　(2) $y''=x+\sin x$；

(3) $y''+y'=\mathrm{e}^x$；　　(4) $y''=\mathrm{e}^x+1$；

(5) $y''=\frac{y'^2}{y-1}$；　　(6) $y''(1+\mathrm{e}^x)+y'=0$；

(7) $y''=y'+x$；　　(8) $(1+x^2)y''=2xy'$；

(9) $y''=y'^3+y'$；　　(10) $xy''+y'=0$.

2.求下列微分方程的通解.

(1) $y''=\cos 2x$；　　(2) $y''+\frac{2}{1-x}y'=0$；

(3) $y''-y'=0$；　　(4) $y''=e^{2x}$；

(5) $(1+x^2)y''=2xy'$.

3.求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $xy''-y'=x^2,y|_{x=1}=1,y'|_{x=1}=0$；

(2) $1+y'=xy'',y|_{x=1}=1,y'|_{x=1}=1$；

(3) $y''(e^x+1)+y'=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$；

(4) $xy''+2y'=0,y|_{x=1}=0,y'|_{x=1}=1$.

4.求微分方程 $y'''=e^{2x}$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0,y'|_{x=1}=0,y''|_{x=1}=0$ 的特解.

5.设 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数为 $y''=x$，且曲线 $y=f(x)$ 过点 $M(0,1)$，在该点处与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切，求曲线 $y=f(x)$ 的表达式.

第四节　二阶常系数齐次线性微分方程

一、二阶常系数齐次线性微分方程解的性质

定义　形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{7-3}$$

的方程(其中 p,q 为常数)称为二阶常系数齐次线性微分方程.

对于此类方程，我们有下述定理：

定理(齐次线性方程解的叠加原理)　若 y_1,y_2 是齐次线性方程(7-3)的两个解，则 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 也是(7-3)的解，且当 y_1 与 y_2 线性无关时，$y=c_1y_1+c_2y_2$ 就是式(7-3)的通解.

二、二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法

齐次线性方程解的叠加原理告诉我们，欲求齐次线性方程(7-3)的通解，只须求出它的两个线性无关的特解即可.为此，我们先分析齐次线性方程具有什么特点.齐次线性方程(7-3)左端是未知函数与未知函数一阶导数、二阶导数的某种组合，且它们分别乘以“适当”的常数后，可合并成零，这就是说，适合于方程(7-3)的函数 y 必须与其一阶导数、二阶导数只差一个常数因子，而具有此特征的最简单的函数是 e^{rx} (其中 r 为常数)，为此我们令 $y=e^{rx}$ 为方程(7-3)的特解，并代入方程(7-3)中，得

$r^2e^{rx}+pre^{rx}+qe^{rx}=0.$

因为 $e^{rx}\neq 0$,所以有

$$r^2+pr+q=0 \tag{4-2}$$

由此可见,只要 r 满足方程(7-4),函数 $y=e^{rx}$ 就是方程(7-3)的解.我们称方程(7-4)为微分方程(7-3)的特征方程,称方程(7-4)的根为特征根.下面我们就特征方程(7-4)的不同特征根讨论齐次线性方程(7-3)的解.

1.当特征方程(7-4)有两个不同的实根 r_1 和 r_2 时,则方程(7-3)有两个线性无关的解 $y_1=e^{r_1x}$,$y_2=e^{r_2x}$.此时方程(7-3)有通解

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}.$$

2.当特征方程(7-4)有两个相同实根时,即 $r_1=r_2=r$,方程(7-3)只有一个解 $y_1=e^{rx}$.

这时直接验证可知 $y_2=xe^{rx}$ 是方程(7-3)的另一个解,且 y_1,y_2 线性无关,于是此时有通解

$$\begin{aligned} y&=c_1e^{rx}+c_2e^{rx}\\ &=(c_1+c_2x)e^{rx}. \end{aligned}$$

3.当特征方程(7-4)有一对共轭复根时,即 $r=\alpha+\beta i$(其中 α,β 均为实常数,且 $\beta\neq 0$),此时方程(7-3)有两个线性无关的解 $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$ 和 $y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$,则方程(7-3)的通解为

$$\begin{aligned} y&=Ae^{(\alpha+\beta i)x}+Be^{(\alpha-\beta i)x}\\ &=e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x}+Be^{-i\beta x}). \end{aligned}$$

利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,还可得到实数形式的通解

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x),$$

其中 $c_1=A+B$,$c_2=(A-B)i$.通常情况下,如无特别声明,均要求写出实数形式的解.

根据上述讨论,求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤是:

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$;

第二步　求出特征根;

第三步　根据特征根的情况写出所给微分方程的通解.

练习 7.4

1.求下列微分方程的通解.

(1) $y''+y'-12y=0$;　　(2) $y''+14y'=0$;

(3) $y''+4y=0$;　　(4) $y''+y'+y=0$;

(5) $4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$；　　(6) $y''-5y'+2y=0$；

(7) $y''-2y'+y=0$；　　(8) $y''-2y'+5y=0$.

2.求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$；

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''+y'-2y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=1$；

(4) $y''+y'+y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$；

(5) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$；

(6) $y''+12y'+36y=0, y|_{x=0}=4, y'|_{x=0}=2$.

3.函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt$，求 $\varphi(x)$.

4.验证函数 $y_1=\sin 3x, y_2=2\sin 3x$ 是否是微分方程 $y''+qy=0$ 的两个解，若是，能否说 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该方程的通解？

5.验证函数 $y=C_1e^{(-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i)x}+C_2e^{(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i)x}$ 是否是方程 $y''+3y'+y=0$ 的通解.

6.已知 $y_1=e^{2x}, y_2=e^{-x}$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特解，试写出该方程的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

第五节　二阶常系数非齐次线性微分方程

一、二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构

定理　若 y_p 为非齐次线性方程的某个特解，y_c 为其对应的齐次方程

$$y''=py'+qy=0 \tag{7-5}$$

的通解，则 $y=y_p+y_c$ 为非齐次线性方程的通解.

二、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

由二阶非齐次方程解的结构定理可知，线性非齐次方程的通解是对应的线性齐次方程的通解与其自身的一个特解之和，而求二阶常系数线性齐次方程的通解问题已经解决，所以求线性非齐次方程的通解关键在于求其一个特解.

下面介绍当自由项 $f(x)$属于某些特殊类型时如何求特解.

1. $f(x)=p_n(x)e^{\lambda x}$

设二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y''=py'+qy=p_n(x)e^{\lambda x} \tag{7-6}$$

其中 $p_n(x)$ 是一个 n 次多项式，λ 是常数，经分析可知，方程具有形如 $y_p=x^kQ_n(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中 $Q_n(x)$ 是一个特定的 n 次多项式. 当 λ 不是式(7-6)所对应的线性齐次方程的特征方程(7-5)的根时，取 $k=0$；当 λ 是特征方程的单根时，取 $k=1$；当 λ 是特征方程的重根时，取 $k=2$.

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_c(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

设二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_c(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x].$$

其中 $P_c(x)$，$P_n(x)$分别是 c 次和 n 次多项式，λ 和 ω 是常数，经分析可知，方程具有形如

$$y_p=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解，其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$是 m 次多项式，$m=\max\{c,n\}$；当 $\lambda\pm\omega i$ 不是特征根时，$k=0$；当 $\lambda\pm\omega i$ 是特征根时，$k=1$.

在一般情况下，微分方程 $ay''+by'+cy=f(x)$的特解 y_p 的求法如下：

1）自由项 $f(x)$是同次多项式

当 $c\neq 0$ 时，y_p 是 $f(x)$的同次多项式；

当 $c=0,b\neq 0$，y_p 是 $f(x)$的同次多项式乘以 x；

2）自由项 $f(x)=pe^{\lambda x}$

当 λ 不是特征方程的根时，$y_p=Ae^{\lambda x}$；

当 λ 是特征方程的单根时，$y_p=Axe^{\lambda x}$；

当 λ 是特征方程的重根时，$y_p=Ax^2e^{\lambda x}$.

3）自由项 $f(x)=p\cos\omega x+q\sin\omega x$

当 $\pm\omega i$ 不是特征方程的根时，$y_p=A\cos\omega x+B\sin\omega x$；

当 $\pm\omega i$ 是特征方程的根时，$y_p=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$.

或者用欧拉公式化成指数函数的形式.

练习 7.5

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $2y''+y'-y=2e^x$；　　(2) $y''+y'-6y=x^2e^{2x}$；

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；　　(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$；

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$；　　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$.

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y''+y=-\sin 2x, y\big|_{x=\pi}=1, y'\big|_{x=\pi}=1$；

(2) $y''-2y'-3y=3x+1, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x}, y|_{x=0}=\frac{1}{7}, y'|_{x=0}=\frac{3}{7}$；

(4) $y''-y=4xe^{x}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$.

3. 验证函数 $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$是方程 $y''+4y=x^2$ 的通解.

4. 写出下列微分方程的一个特解.

(1)$y''+5y'+4y=3x^2+1$；　　(2)$4y''+12y'+9y=e^{-\frac{3}{2}x}$；

(3)$y''-2y'-3y=3xe^{2x}$；　　(4)$y''+4y'+13y=e^{-2x}\sin 2x$.

5. 求下列微分方程的通解.

(1)$y''-4y=2x+1$；　　(2)$y''+5y'+4y=3-2x$；

(3)$2y''+y'-y=2e^{x}$；　　(4)$y''+4y=x\cos x$.

6. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1)$y''+y'-2y=2x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$；

(2)$y''+2y'+2y=xe^{-x}, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$.

7. $y''+9y=0$ 的一条积分曲线通过点$(\pi,-1)$，且在该点和直线 $y+1=x-\pi$ 相切，求这条曲线.

测　试　题

1. 选择题.

(1)下列方程中为一阶微分方程的是(　　).

A. $x(y')^2-yy'=0$　　B. $(y'')^2+y+x=0$

C. $y'''+y^2-x=0$　　D. $x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

(2)微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\cos x$ 是(　　).

A. 二阶齐次微分方程　　B. 二阶非线性微分方程

C. 二阶常系数非齐次线性微分方程　　D. 不是常微分方程

(3)下列函数中，(　　)是微分方程 $y'+\frac{y}{x}=x$ 的解.

A. x^2+3　　B. $3x^2+C$

C. $\frac{x^3}{3}+\frac{C}{x}$　　D. $\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}$

(4) 已知 $y=x, y=x^2$ 是某二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+Q(x)=0$ 的两个解，则该方程的通解为(　　).

A. $y=x+Cx^2$　　B. $y=Cx^2+x$

C. $y=Cx^2$　　D. $y=C_1x+C_2x^2$

(5)下列函数中线性无关的是(　　).

A. e^x 与 $3e^x$　　B. $\cos x$ 与 $5\cos x$

C. e^{2x} 与 e^{3x}　　D. $2\sin x$ 与 $\sin x$

(6)已知函数 $y=5x^2$ 是方程 $xy'=2y$ 的解,则方程的通解为(　　).

A. $y=5x^2+C$　　B. $y=Cx^2$

C. $y=(x+C)x^2$　　D. $y=5(x^2+C)$

2. 填空题.

(1) $(y''')^2+2y'+x^3y=x^5+1$ 是________阶微分方程.

(2) $y''+y'-x=0$ 的特征方程为________.

(3) 方程 $y''-4y'=0$ 的通解为________.

(4) 微分方程 $y''-2y'+y=e^x$ 的特解形式为________.

(5) 微分方程 $y''=2\sin x$ 的通解为________.

(6) 微分方程 $y''+y=\cos x$ 的特解形式为________.

3. 验证下列给出的函数是否为相应微分方程的解.

(1) $y=\cos 2x+\sin 2x$, $y''+4y=0$;

(2) $y=\sin x$, $\dfrac{dy}{dx}-2y=0$;

(3) $y=\dfrac{C-x^2}{2x}$, $(x+y)dx+xdy=0$;

(4) $y=C_1e^x+C_2xe^x$, $y''-2y'+y=0$.

4. 求下列一阶微分方程的解.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}$;　　(2) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;

(3) $(x-y)\dfrac{dy}{dx}=x+y$;　　(4) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=0$;

(5) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}-\sin x=0$;　　(6) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$;

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x-y^2}$.

5. 求下列二阶微分方程的通解.

(1) $y''=\cos 2x$;　　(2) $y''(e^x+1)+y'=0$;

(3) $y''=e^x+1$;　　(4) $xy''+2y'=0$;

(5) $y''+y'^2=2e^{-y}$;　　(6) $y''=y'+x$.

6. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''-10y'-11y=0$;　　(2) $y''-y'-20y=0$;

(3) $y''-8y'+16y=0$;　　(4) $y''+y=0$;

(5) $y''+6y'+13y=0$;　　(6) $2y''+y'-y=2e^x$;

(7) $y''-4y'+4y=e^{2x}$;　　(8) $y''+4y=3\sin 2x$.

7. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+2xy^2=0, y|_{x=0}=1$;

(2) $y''-\dfrac{2}{x+1}y'=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$;

(3) $y''-3y'+2y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$;

(4) $y''+y+\sin 2x=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=10$.

8. 某曲线过原点，曲线上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标与纵坐标 3 倍之和，求该曲线方程.

9. 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

10. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y^3 dx+2(x^2-xy^2)dy=0, y|_{x=1}=1$;

(2) $y''+12y'+36y=0, y|_{x=0}=4, y'|_{x=0}=2$;

(3) $y''+2y'+y=\cos x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=\dfrac{3}{2}$.

11. 设 $y=f(x)$ 满足 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$.

第八章　向量代数与空间解析几何

第一节　空间直角坐标系

1. 坐标系：公共原点 O，三条互相垂直的数轴 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），符合右手规则，点 O 称为坐标原点，数轴 x、y、z 统称为坐标轴. xOy、yOz、zOx 为三个坐标面，三个坐标面将空间分成 8 个部分，每部分称为一个卦限，卦限分别用Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ表示.

2. 点的坐标：设 M 为空间中一点，过 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R. 设 P、Q、R 三点在三个坐标轴的坐标依次为 x、y、z，空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)，称为 M 的直角坐标，x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

3. 两点间的距离：设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，距离为 d，则

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，$M(x,y,z)$ 与原点 $(0,0,0)$ 的距离为 $d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

练习 8.1

1. 在空间直角坐标系中描出下列各点，并指出它们的位置特征.

$A(0,2,-2)$，$B(5,0,1)$，$C(1,0,0)$，$D(0,0,-3)$，$E(3,1,2)$.

2. 已知点 $M_1(3,0,-1)$，$M_2(-1,2,1)$，试求：

(1) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_1}$，$\overrightarrow{OM_1}$ 的坐标表示；

(2) 点 M_1 到 M_2 的距离.

3. 指出下列各点所在的坐标轴、坐标面或卦限.

$A(2,-3,-5)$，$B(0,4,3)$，$C(0,-3,0)$，$D(2,3,-5)$.

第二节　向　　量

一、向量的概念

1. 定义：既有大小又有方向的量称为向量(矢量).

2. 表示：用有向线段来表示向量. 线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的大小.

3. 向量的模：向量的大小称为向量的模，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$，向量$\boldsymbol{a}$的模记为$|\boldsymbol{a}|$；模等于1的向量称为单位向量；模为零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$，零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

4. 向量相等：如果两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的模相等，方向相同，则称向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是相等的，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经过平移后能完全重合的向量是相等的.

5. 向量平行：如果两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的方向相反或者相同，则称两个向量平行，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向任意的，因此可以认为零向量与任何向量平行.

二、向量的线性运算

(一)向量的加减法

1. 向量的加法法则：

法则1(平行四边形法则)　设有两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以$AB$，$AD$为邻边作平行四边形，其对角线向量$\overrightarrow{AC}$(如图8-2-1所示)称为向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的和，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

法则2(三角形法则)　以向量$\boldsymbol{a}$的终点作为向量$\boldsymbol{b}$的起点，则由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量.

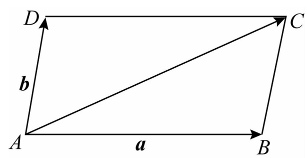

图8-2-1

2. 向量加法运算的性质：

(1)交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3)零向量：$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$.

3. 向量的减法：设$\boldsymbol{a}$为一向量，与$\boldsymbol{a}$的模相等而方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的负向量，记为$-\boldsymbol{a}$. 规定两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差：$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

把向量$-\boldsymbol{a}$加到向量$\boldsymbol{b}$上,便得到$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,如图 8-2-2 所示.

(二)向量与数的乘法

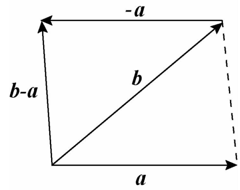

图 8-2-2

1.向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记为$\lambda\boldsymbol{a}$,规定它为一个向量,它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$,它的方向当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同,当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反,当$\lambda=0$时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量,方向可以是任意的.

2.性质:

(1)结合律:$\lambda(m\boldsymbol{a})=m(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda m)\boldsymbol{a}$;

(2)分配律:$(\lambda+m)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(3)向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$.

(4)与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量记作$\boldsymbol{e}_a$,则$|\boldsymbol{e}_a|=1$且$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,即$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

四、向量的坐标

(一)向量在轴上的投影

1.向量的夹角:

设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量,将它们的起点都平移到某一点$O$,得到向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1$.由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1$所成的角(在 0 与$\pi$之间)称为向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角,记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

注:向量与轴的夹角就是向量与轴的正向所成的角.

2.点在轴上的投影:

已知空间的点A和轴u,过点A作垂直于u的平面α,则平面α与轴u的交点A'称为点A在轴u上的投影(如图 8-2-3 所示).

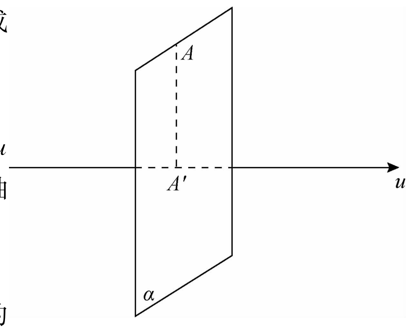

图 8-2-3

3.向量在轴上的投影:

已知向量$\overrightarrow{AB}$的起点A和终点B在轴u上的投影分别为A'和B'(如图 8-2-4 所示),则轴u上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值$A'B'$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影,记作$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$,轴$u$称为投影轴.

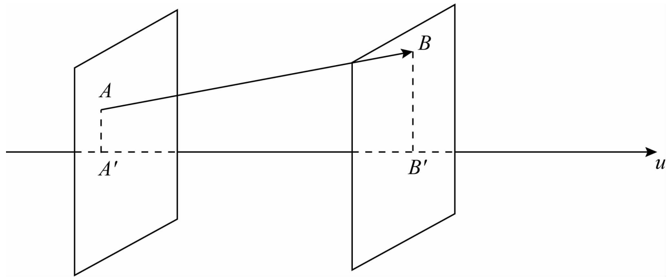

图 8-2-4

4. 向量投影的性质：

性质 1　$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$（$\alpha$ 为$\overrightarrow{AB}$与轴 u 的夹角）；

性质 2　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

性质 3　$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

(二)向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，以原点为起点，终点为(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)的三个单位向量称为这个坐标系的基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O，终点为 $M(a_x,a_y,a_z)$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$. 如图 8-2-5 所示.

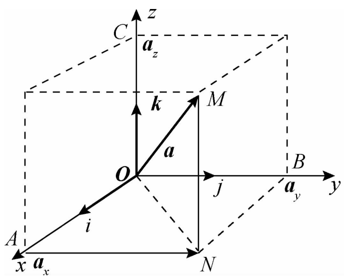

图 8-2-5

则有 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，又由于$\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=a_z\boldsymbol{k}$. 于是 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，其中 a_x,a_y,a_z，是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影.

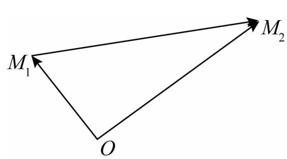

图 8-2-6

对空间中任一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，起点 M_1 与终点 M_2 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，如图 8-2-6 所示，则有 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ 或$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$|\overrightarrow{M_1M_2}|=$

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，利用向量的坐标可以得到向量的加减法及向量与数的乘法运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\lambda$ 为常数，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

四、向量的数量积

1. 定义：两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模及它们的夹角余弦的乘积，称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

由数量积的定义可推得：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{b}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2. 性质：(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

3. 坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

4. 两向量间的夹角：

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$间的夹角为 θ，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，得 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

二、向量的向量积

1. 定义：设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 按下列方式确定：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量，且 $\boldsymbol{c}$ 的指向由右手法则由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

由向量积的定义可推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3) 对于单位坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有以下性质：

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$

2.性质：

(1)反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(2)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3)结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

3.向量的坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

练习 8.2

1.求证：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形为等腰三角形.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,2)$，$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$，试求：

(1)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$；　　(2)$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$($m,n$ 为常数).

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的起点坐标为$(1,-1,5)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标.

4.求下列各向量的模及与它们同方向的单位向量.

(1)$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；　　(2)$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

5.已知向量 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 平行，试求系数 m 和 n.

6.试用向量证明：三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.

7.向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，且与 $\boldsymbol{c}=(2,-1,1)$的数量积为-6，求向量 $\boldsymbol{d}$.

8.向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 分别垂直于向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

9.在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(5,-6,2)$和 $C(1,3,-1)$的三角形中，求 AC 边上的高 BD.

10.设$|\boldsymbol{abc}|=2$，试求$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

第三节　平面及其方程

一、法向量

与平面垂直的非零向量称为法向量.一个平面可以有正反两个方向的法向量，

并且平面内的任意一个向量都与法向量垂直.

二、平面方程

1.平面的点法式方程:设已知平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量,法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,则平面的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2.平面的一般方程:任何平面都可用 x,y,z 的一次方程来表示,即

$Ax+By+Cz+D=0$.

(3)平面的截矩式方程:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$,如图 8-3-1 所示.

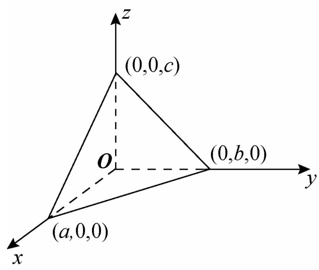

图 8-3-1

下面讨论方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的一些特殊情形.

当 $D=0$ 时,方程变为 $Ax+By+Cz=0$,显然,这时平面过原点;

当 $A=0$ 时,方程变为 $By+Cz+D=0$,这时平面平行于 x 轴;

当 $A=D=0$ 时,方程变为 $By+Cz=0$,这时平面通过 x 轴;

当 $A=B=0$ 时,方程变为 $Cz+D=0$,这时平面平行于 xOy 坐标平面;

当 $A=B=D=0$ 时,方程变为 $z=0$,这时平面表示 xOy 坐标平面.

三、两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角.设平面 π_1,π_2 的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 和 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

设它们的夹角为 θ,由于两平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$$

因此,由两向量夹角的余弦公式可知,两平面夹角 θ 的余弦的计算公式为

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\\&=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.\end{aligned}$$

设平面 π_1,π_2 的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 和 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则这两个平面垂直的充要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

这两个平面平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

练习 8.3

1. 指出下列方程所表示平面的位置特点,并画出简图.

(1)$z=0$;　　(2)$x+2y=3$;

(3)$y=1$;　　(4)$x+2y=0$;

(5)$3x-2y+z=0$;　　(6)$x+y+z=3$.

2. 求过点$(2,1,-1)$且法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的平面方程.

3. 求过点$(1,-2,3)$且与平面 $7x-3y+z-6=0$ 平行的平面方程.

4. 写出满足下列条件的平面方程.

(1)过点$(1,-2,4)$,垂直于 x 轴;

(2)过点$(-1,3,-2)$,通过 z 轴;

(3)过点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$,平行于 y 轴;

(4)过三点 $A(1,-1,0)$,$B(2,3,-1)$,$C(-1,0,2)$;

(5)过点$(5,-7,4)$,且在三坐标轴上的截距相等.

5. 判断下列各题中两平面的位置关系.

(1)$x-2y+7z+3=0$,$3x+5y+z-1=0$;

(2)$x+y+z-7=0$,$2x+2y+2z-1=0$;

(3)$2x-3y+z-1=0$,$x+2y-2z+1=0$.

6. 求在 x 轴上截距为 3,z 轴上截距为-1,且与平面 $3x+y-z+1=0$ 垂直的平面方程.

7. 求平面 $2x-y+z=7$ 与 $x+y+2z=11$ 的夹角.

8. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标平面的夹角余弦.

第四节　空间直线及其方程

一、直线方程

1. 空间直线 L 的一般方程:$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

2. 空间直线的对称式方程:设直线 L 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,其方向向量为 $\boldsymbol{s}=$

(m,n,p),则方程为$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

3.空间直线的参数方程:$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\quad t\in(-\infty,+\infty)$.

二、空间两直线的夹角

两直线方向向量的夹角称为两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\text{和}\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

因为它们的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$,$\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$,所以这两条直线的夹角的余弦为

$$\begin{aligned}\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle&=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\\&=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\end{aligned}$$

通常规定 $\theta\in[0,\pi]$,容易知道,两直线 L_1,L_2 垂直的充要条件是

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

两直线 L_1,L_2 平行的充要条件是

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

练习 8.4

1.求过点(1,1,1)且平行于直线$\frac{x-1}{3}=y-2=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$的直线方程.

2.求过点(0,2,4)且与两平面平行的直线方程,两平面为

$$\pi_1:x+2z=0,\ \pi_2:y-3z=2$$

3.求过点(1,2,0)与(2,1,3)的直线方程.

4.化直线方程$\begin{cases}5x+y+z=0\\2x+3y-2z+5=0\end{cases}$为对称式和参数式.

5.D 为何值时,直线$\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+D=0\end{cases}$与 z 轴相交?

6.求过点(2,2,-1)且与直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$平行的直线方程.

7. 求过点$(2,-3,4)$且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直的直线方程.

8. 求直线 $L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{x+1}{3}$与 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$的夹角.

9. 求直线$\begin{cases}3x-y+2z=0\\6x-3y+2z=2\end{cases}$的方向余弦(即方向向量的方向余弦).

10. B 和 D 为何值时,直线$\begin{cases}x+By-2z+D=0\\x+3y-6z-27=0\end{cases}$过点$(0,13,2)$且垂直于 x 轴?

11. 求过点$(3,4,-2)$,方向角(即方向向量的方向角)为 $60^\circ,45^\circ,120^\circ$的直线方程.

第五节　曲 面 方 程

一、曲面及其方程

如果曲面 S 上所有点都满足某三元方程 $F(x,y,z)=0$,且不在曲面 S 上的点的坐标都不满足该方程,那么方程 $F(x,y,z)=0$ 就称为曲面 S 的方程.

二、球面方程

球心在 $C(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

三、柱面方程

在空间坐标系 $Oxyz$ 中,方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示一个以平行于 z 轴的直线为母线的椭圆柱面,方程 $x^2=2py$ 表示一个以平行于 z 轴的直线为母线的抛物柱面.

四、旋转曲面

设 yOz 面上一条曲线 L 的方程为$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\x=0\end{cases}$,这条曲线绕 z 轴旋转,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},z)=0$.

同理,曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$.

练习 8.5

1.求满足下列条件的动点轨迹方程.

(1)到点$(c,0,0)$与到点$(-c,0,0)$的距离之和为定值$2a(a>c>0)$；

(2)到点$(1,2,1)$与到点$(2,0,1)$的距离分别等于3和2；

(3)到点$(-4,3,4)$的距离等于到xOy平面的距离.

2.求下列曲面方程.

(1)中心在$(2,-2,1)$并与zOx平面相切的球面；

(2)曲线$\begin{cases} z^2=5 \\ y=0 \end{cases}$绕$x$轴旋转所成的曲面；

(3)以$y^2=2x$为准线，母线平行于z轴的柱面；

(4)顶点在原点，以z轴为对称轴，顶角为$\frac{\pi}{3}$的圆锥面方程.

3.求下列各球面的球心和半径.

(1)$x^2+y^2+z^3-6z-7=0$；

(2)$36x^2+36y^2+36z^2-72x-36y-24x+13=0$.

4.求由下列曲线旋转所得旋转曲面的方程.

(1)$\begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1 \\ y=0 \end{cases}$，绕$x$轴及$z$轴旋转；

(2)$\begin{cases} z=\sqrt{y} \\ x=0 \end{cases}$，绕$y$轴及$z$轴旋转；

(3)$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，绕$x$轴及$y$轴旋转.

5.指出下列方程所表示的曲面名称.

(1)$x^2+y^2=2x$； (2)$2x+4y-3z=12$；

(3)$x^2+y^2+4z^2-1=0$； (4)$2x^2+3y^2-z^2-1=0$；

(5)$x^2+y^2+z=1$； (6)$2x^2+2y^2-z^2=0$；

(7)$x^2-z^2=0$； (8)$2x^2-y^2-z^2=1$.

6.方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$表示什么曲线？

7.画出下列曲面.

(1)$9x^2+4y^2+36z^2=36$； (2)$z=x^2+y^2$；

(3)$y^2+z^2=9$.

8.将xOy面上的抛物线$y^2=5x$绕x轴旋转一周，求所生成的旋转曲面方程.

第六节　空间曲线及其方程

1. 一般方程$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

2. 参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$($t$ 为参数).

3. 空间曲线在坐标面上的投影曲线：

(1)设曲线 C 为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,消去 z,得到曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程 $\Phi(x,y)=0$,则曲线 C 在 xOy 面的投影曲线为$\begin{cases}\Phi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

(2)设曲线 C 为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,消去 x,得到曲线 C 关于 yOz 面的投影柱面方程 $\Psi(y,z)=0$,则曲线 C 在 yOz 面的投影曲线为$\begin{cases}\Psi(y,z)=0\\x=0\end{cases}$.

(3)设曲线 C 为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,消去 y,得到曲线 C 关于 zOx 面的投影柱面方程 $\Omega(x,z)=0$,则曲线 C 在 zOx 面的投影曲线为$\begin{cases}\Omega(x,z)=0\\y=0\end{cases}$.

练习 8.6

1. 求曲线$\begin{cases}y^2+z^2-2x=0\\z=3\end{cases}$在 xOy 面上的投影曲线方程,并指出原曲线是什么曲线.

2. 下列方程表示什么曲线?

(1)$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\y=3\end{cases}$;　　(2)$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$.

3. 求曲线$\begin{cases}z=2-x^2-y^2\\z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线方程.

4. 求下列曲线在 xOy 平面上的投影曲线方程.

(1)$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$;　　(2)$\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\z=x+1\end{cases}$;

(3) $\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z^2=2y \end{cases}$；　　(4) $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2x+y^2=0 \end{cases}$.

5. 作出下列空间区域的图形.

(1) $x=0, y=0, z=0, 2x-3y+2z-6=0$；

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2=2$；

(3) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2=y, z=0$；

(4) $z=1-x^2, z=x^2=y^2$.

测　试　题

1. 判断题.

(1) 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$ 的单位向量是 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.　　(　　)

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.　　(　　)

(3) 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(3,6,8)$ 和 x 轴的单位向量为 $(0,0,1)$.　　(　　)

(4) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.　　(　　)

2. 填空题：

(1) 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,1), \boldsymbol{b}=(1,1,2)$，则 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=$ ________；

(2) 与平面 $x-y+2z-6=0$ 垂直的单位向量为________；

(3) 过点 $(-3,1,-2)$ 和 $(3,0,5)$ 且平行于 x 轴的平面方程为________________；

(4) 过原点且垂直于平面 $2y-z+2=0$ 的直线方程为________________.

3. 选择题.

(1) 下列平面方程中，所表示的平面过 y 轴的是(　　)；

A. $x+y+z=1$　　B. $x+y+z=0$

C. $x+z=0$　　D. $x+z=1$

(2) 在空间直角坐标系中，方程 $z=1-x^2-2y^2$ 所表示的曲面是(　　)；

A. 椭球面　　B. 椭圆抛物面

C. 椭圆柱面　　D. 单叶双曲面

(3) 直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 与平面 $x-y+z=1$ 的位置关系是(　　)；

A. 垂直　　B. 平行

C. 夹角为 $\frac{\pi}{4}$　　D. 夹角为 $-\frac{\pi}{4}$

(4)空间曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2-2 \\ z=5 \end{cases}$在 xOy 面上的投影方程为(　　).

A. $x^2+y^2=7$　　B. $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ z=5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ z=0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} z=x^2+y^2-2 \\ z=0 \end{cases}$

4.指出下列方程所表示的图形名称.

(1)$x^2+4y^2+x^2=1$;　　(2)$x^2+y^2=2z$;

(3)$z=\sqrt{x^2+y^2}$;　　(4)$x^2-y^2=0$;

(5)$x^2-y^2=1$;　　(6)$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2 \end{cases}$

5.一直线通过点 $A(1,2,1)$,且垂直于直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$,又和直线 $x=y=z$ 相交,求该直线方程.

6.一平面过直线$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$,且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 垂直,求该平面方程.

7.求点 $A(0,-1,1)$到直线$\begin{cases} y+1=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$的距离.

8.求两平行平面 $3x+6y-2z-7=0$ 和 $3x+6y-2z+14=0$ 间的距离.

9.求以$\begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$为准线,母线平行于向量(1,2,1)的柱面方程.

10.直线 l:$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转一周,求所得旋转曲面的方程.

11.将空间曲线的一般方程$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=x^2-y^2 \end{cases}$化为参数方程.

12.将直线的一般方程$\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+y-3z-7=0 \end{cases}$化为对称式方程.

第九章 无穷级数

第一节 数项级数的概念和性质

一、数项级数的概念

定义 1 设给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$,则式子

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为常数项无穷级数,简称数项级数,其中第 n 项 u_n 称为一般项或通项.

简言之,无穷数列的和式称为无穷级数.

例如,等差数列各项的和 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_1 + (n-1)d]$ 称为算术级数,等比数列各项的和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ 称为等比级数或几何级数.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ 称为 p^- 级数.若 $p = 1$,则级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$,称为调和级数.

二、数项级数的敛散性

定义 2 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 的前 n 项之和为

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和.当 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 时,得到一个新的数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots (其中\ S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots)$$

数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列.若此数列的极限存在,即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$(常

数)，则称 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

此时称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，这时级数没有和.

当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$ 的近似值，称 $S - S_n$ 为级数的余项，记做 r_n，即

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

练习 9.1

1. 试写出下列级数的一个通项.

(1) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots$；　　(2) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$；

(3) $1 - \frac{8}{2} + \frac{27}{6} - \frac{64}{24} + \cdots$；　　(4) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \frac{7}{17} + \cdots$.

2. 试写出下列级数的前五项.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 - \frac{n-1)^2}{n+1}\right]$.

3. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

4. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

5. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.

6. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots$；　　(2) $-\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots$.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为非零常数，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + a)$ 的敛散性.

第二节　正项级数及其敛散性

定义　正项级数是指级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n > 0$.

定理　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

1. 判别法：

(1) 比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $u_n \leqslant v_n$，那么若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(2) 比较判别法的极限形式

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$，则有 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；$l = 0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；$l = +\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = l > 0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = +\infty$），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若有 $p > 1$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = l(0 \leqslant l < +\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) 比值判别法

若设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，敛散性不确定.

(4) 根值收敛法

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 不存在时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，敛散性不确定.

2. 两个重要级数：

(1) 几何级数. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ 的级数称为几何

级数,其敛散性有如下结论:当 $|q|<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant 1$ 时,级数发散.

(2)P 级数.形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}=\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots$ 的级数称为 P 级数,其敛散性有如下结论:当 $P>1$ 时,P 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛;当 $P\leqslant 1$ 时,发散;当 $P=1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 称为调和级数.

注意:(1) 若 u_n 中含 $n!$ 或 n 的乘积,通常选用比值判别法.

(2) 若 u_n 是以 n 为指数幂的因子,通常用根值判别法,也可用比值判别法.

(3) 若 u_n 含形如 n^{α}(α 可以不是整数)的因子,通常用比较别法.

练习 9.2

1.用比较审敛法或其极限形式判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-3}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2-\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

2.用比值审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{2^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{3^n\cdot n!}$.

3.用根值审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

4.判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+7}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^2}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.

5.讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}(a>0)$的敛散性.

6.试在$(0,+\infty)$内讨论x在何区间取值时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$收敛.

第三节　任意项级数及其敛散性

一、交错级数

定义 1　如果在任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中,正负号相间出现,这样的任意项级数称为交错级数,它的一般形式是

$$u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

其中$u_n>0(n=1,2,3\cdots)$

对于交错级数的敛散性,我们有如下判定方法:

定理 1(莱布尼茨审敛法)　设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足:

(1)$u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,

(2)$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$,

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛,且其和$S \leqslant u_1$(证明从略)。

二、绝对收敛与条件收敛

定义 2　对于任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,如果正项级数$\sum_{n\to 0}^{\infty}|u_n|$收敛,则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝

对收敛；如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

定理 2　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛.

定理 3　若任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n+1}{u_n}\right|=l$，则

(1) 当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；

(2) 当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

练习 9.3

1. 判定下列交错级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{2n+1}$.

2. 判定下列各级数是否收敛，若收敛，指出其是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\alpha}{n^3}$（$\alpha$是与$n$无关的常数）；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{1}{3^n}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$（$p>0$且与$n$无关）.

第四节　幂级数

一、函数项级数

定义 1　给定一个定义在区间 I 上的函数序列 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$,那么由此函数列构成的表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 称为定义在 I 上的函数项级数.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛,则称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点,所有的收敛点的集合称为它的收敛域;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散,则称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的发散点,所有的发散点的集合称为它的发散域.

二、幂级数

定义 2　函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为 $x-x_0$ 的幂级数,当 $x_0=0$ 时,称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为 x 的幂级数,其中常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 称为幂级数的系数.

定理 1(阿贝尔定理)　如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛,则它满足 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛;如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处发散,则它满足 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 处发散.

推论　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个完全确定的正数 R,使它具有以下性质:

(1) 当 $|x|<R$ 时,幂级数绝对收敛;

(2) 当 $|x|>R$ 时,幂级数发散;

(3) 当 $x=R$ 或 $x=-R$ 时,幂级数可能收敛也可能发散.

R 称为幂级数的收敛半径,$(-R,R)$ 称为幂级数的收敛区间.

规定:(1) 幂级数仅在 $x=0$ 处收敛,$R=0$,收敛区间为 $x=0$;

(2) 幂级数对一切 x 都收敛，$R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

定理 2　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的所有系数 $a_n \neq 0$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（或 $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \rho$），则有：(1) 当 $\rho \neq 0$ 时，$R=\frac{1}{\rho}$；(2) 当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；(3) 当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

三、幂级数的运算

性质 1　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s_1(x)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = s_2(x)$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，其中 $R_1>0, R_2>0$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = s_1(x) \pm s_2(x)$，其收敛半径为 R，则 $R=\min\{R_1,R_2\}$.

性质 2　级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续，在端点收敛，则在端点单侧连续.

性质 3（逐项积分运算）　当 $x \in (-R,R)$ 时有 $\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$，收敛半径不变.

性质 4（逐项微分运算）　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，并可逐项求导任意次，即 $s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，收敛半径不变.

注：性质 3，4 只说收敛半径不变，并未指出收敛域是否相同. 应将端点代入进行判定，以得出新级数的收敛域.

常用已知和函数的幂级数如下：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$；(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$；(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a x^{2n} = \frac{a}{1-x^2}$；(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$；(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$；(6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$.

练习 9.4

1. 判定下列幂级数的敛散性.

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots$;

(2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\times4}+\dfrac{x^3}{2\times4\times6}+\cdots$;

(3) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{x^3}{3^2}+\cdots$;

(4) $\dfrac{x}{1\times3}+\dfrac{x^2}{2\times3^2}+\dfrac{x^3}{3\times3^3}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n(\sqrt{n}-2)}x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n(2n-1)}$.

2. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^n(-2<x<2)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1<x<1)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n(-1<x<1)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$.

3. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n n^2}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^n$.

4. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

5. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$, $|x|<1$ 的和函数.

7. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$, $|x|<1$ 的和函数.

第五节　函数的幂级数展开

一、泰勒级数

(一) 泰勒公式

定理 1　若 $f(x)$ 在 x_0 某个邻域内具有任意阶导数，且在某个邻域内能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，则其系数为 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2,\cdots)$，且展开式是唯一的.

定理 2　若 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则在 x 与 x_0 之间存在一点 ξ，使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 成立.

上式为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式.

(1) 公式中前 $n+1$ 项称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒多项式，最后一项为 $f(x)$ 的泰勒余项，记作 $R_n(x)$.

(2) 特别地，当 $x_0=0$ 时，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x)$，$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$，$\xi$ 在 0 与 x 之间，称为麦克劳林公式.

(二) 泰勒级数

定义　若 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有任意阶导数，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数，记为 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的麦克劳林级数.

定理 3　设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒级数公式中的余项 $R_n(x)\to 0(n\to\infty)$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可展开

成泰勒级数，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，此式为 $f(x)$ 的泰勒展开式.

(2) 当 $x_0=0$ 时，$f(x)$ 为麦克劳林级数，记为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，此式为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

二、函数展开成幂级数

(一) 直接展开法(泰勒级数法)

步骤：(1) 求 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$；

(2) 求函数及各阶导数在 $x=0$ 处的值：$f(0),f'(0),f''(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots$；

(3) 写出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，求出收敛半径 R；

(4) 考察当 x 在区间 $(-R,R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限是否为 0.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 是否为 0，$\xi\in(0,x)$. 若为 0，则 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 内的幂级数展开式为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ (-R<x<R)$.

(二) 间接展开法

实质：通过变量代换、逐项求导、逐项积分等方法求展开式. 几个常用的初等函数的麦克劳林展开式如下：

(1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$；(2) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$；(3) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；(4) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$；(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$；(6) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$. 其中(1)(2)(3) 的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$，(4) 为 $x\in[-1,1]$，(5)(6) 为 $x\in(-1,1)$.

练习 9.5

1. 试将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛区间.

(1) $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq 0)$；

(2) $f(x)=\ln(2-x)$；

(3) $f(x)=\sin^2 x$；

(4) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$；

(5) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；　　(6) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.

2. 将函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 展开成 x 的幂级数.

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

测　试　题

1. 填空题.

(1) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的________条件.

(2) 部分函数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的________条件.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定________；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定________.

2. 已知级数的部分和 $S_n=\dfrac{2n}{n+1}$，求 u_1,u_2,u_n.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n-1})$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

4. 用定义判断下列级数是否收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

5. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\alpha n}{2^n}(\alpha\neq 0)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{(2n)!}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n\cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

6. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

7. 讨论下列级数的绝对收敛与条件收敛性.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n\times(-1)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$.

8. 判定下列幂级数的敛散性.

(1) $x^2+x^4+x^8+\cdots+x^{2^n}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n+1}x^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

9. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$.

10. 将下列函数展开成幂级数并求收敛区间.

(1) $\sin\frac{x}{2}$;

(2) $\ln(a+x)$.

11. 将函数 $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

12. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展开成含 $(x-2)$ 的幂级数.

第十章　线性代数基础

第一节　行　列　式

一、二阶和三阶行列式

(一)二阶行列式

1. 求解二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$时，将 x_1 和 x_2 的四个系数组成的算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$简记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 即被称为二阶行列式，其中，a_{ij}（$i=1,2;j=1,2$）被称为该行列式的元素，每个横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列.

2. $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，等号右边的式子被称为二阶行列式 Δ 的展开式.

3. 若分别记 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$，当 $\Delta\neq 0$ 时，对应二元一次方程组的解为 $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$，$x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

(二)三阶行列式

1. 对于三元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$，三阶行列式的展开式规

定为：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2. 若分别记 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，若系数行列式 $\Delta\neq 0$，则对应三元一次方程组的唯一解为：$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$，$x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$，$x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

二、n 阶行列式

(一)n 阶行列式的概念

定义 1 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列，并在左、右两边各加一条竖线的算式，即 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称为 n 阶行列式.

1. 当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；当 $n>2$ 时，$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

2. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式；M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式，M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式.

(二)几种特殊的 n 阶行列式

1. 对角行列式：只有在对角线上有非零元素的行列式.

2. 下(上)三角行列式：主对角线以上(下)的元素都为零的行列式.

三、行列式的性质

定义 2 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D 的转置行列式，记做

D^{T}.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的任意两行(或列),则行列式变号.

推论 1　若行列式某两行(或列)的元素对应相等,则行列式的值为零.

性质 3　行列式某行(或列)元素都乘以数 k 等于用 k 乘以行列式.

推论 2　行列式某一行(或列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3　若行列式的某两行(或列)元素对应成比例,则行列式的值为零.

性质 4　如果行列式中某一行(或列)的所有元素都是两数之和,则这个行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(或列)外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同.

性质 5　将行列式某一行(或列)的各元素都乘以同一常数后,再加到另一行(或列)的对应元素上,则行列式的值不变.

性质 6　n 阶行列式等于任意一行(或列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这一性质被称为行列式按行(或列)展开法则.

四、行列式的计算

1. 对二阶、三阶行列式按定义展开,直接计算.

2. 对特殊的行列式,如上(下)三角行列式,其值为主对角线元素的乘积.

3. 利用性质 5,将行列式转化成三角行列式或其他易计算的行列式,然后再计算,这是计算行列式的常用的基本方法.

4. 对照性质 6,将行列式按某一行(或列)的展开式展开,把行列式转化为低一阶的行列式,如此继续下去,直至降到三阶或二阶行列式,再直接计算.

五、克莱姆法则

定理 1　如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 由系数构成的行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,那么线性方程组有唯一解:$x_1=\dfrac{D_1}{D}$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}$,$\cdots$,

$x_n = \dfrac{D_n}{D}$. 此定理为称为克莱姆法则.

定理 2 如果线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 的系数行列式 $D=$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$,那么线性方程组只有零解.

定理 3 如果非齐次线性方程组无解或有多个解,则其系数行列式 D 为零.

推论 4 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式为零.

练习 10.1

1. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$.

5. 判断齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0\\x_1-2x_2+4x_3=0\\5x_1+8x_2-2x_3=0\end{cases}$是否有零解.

6. 求当λ,μ为何值时下面方程组有非零解.

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+12\mu x_2+x_3=0\end{cases}.$$

第二节　矩阵的概念及运算

一、矩阵的基本概念

(一)矩阵的概念

定义 1　由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成$m$行$n$列矩形数表,矩形数表外用圆括号(或方括号)括起来,称为m行n列矩阵.

1. 所有元均为零的矩阵称为零矩阵,记为$\mathbf{0}$.

2. 如果两个矩阵具有相同的行数和相同的列数,则称这两个矩阵为同型矩阵.

定义 2　如果矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同型矩阵,且对应的元相等,则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相等,记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(二)一些特殊的矩阵

1. 只有一行的矩阵称为行矩阵.

2. 只有一列的矩阵称为列矩阵.

3. 形如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$的$n$阶方阵称为$n$阶对角矩阵,对角矩阵可记为$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

4. 形如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$的$n$阶方阵称为$n$阶单位矩阵,$n$阶单位矩阵也可

记为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n$.

5. 当一个 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元全部相等且等于某一数 a 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶数量矩阵.

6. 对于非零矩阵，若满足：矩阵若有零行(元全为数 0 的行)，零行一定在矩阵的最下方；矩阵各非零行第一个非零元所在列中，该元下方的元都为零，则称该矩阵为阶梯形矩阵.

7. 对于阶梯形矩阵，若它还满足：各非零行的第一个非零元都为 1；各非零行的第一个非零元所在列的其他元均为 0，则称该阶梯形矩阵为简化阶梯形矩阵.

二、矩阵的运算

(一)矩阵的加法

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，将它们的对应元相加所得到的 $m\times n$ 矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

1. 由矩阵加法的定义可知，只有同型矩阵才能相加。

2. 矩阵加法具有以下性质：

(1)交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2)结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.

(二)数乘矩阵

定义 4 用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的每一个元所得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记做 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

数与矩阵相乘具有如下性质：

(1)分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(2)结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(3)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；$0\boldsymbol{A}=0$.

(三)矩阵的乘法

定义 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记为 $\boldsymbol{AB}$，若令 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵.

若矩阵乘法可以进行，矩阵乘法具有如下性质：

(1)结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$；

(2)分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

练习 10.2

1. 下列矩阵哪些是阶梯形矩阵？哪些是简化阶梯形矩阵？

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3 & -2\\0 & 0 & 5 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 3\\0 & 1 & 2 & -3\\0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$；　(4) $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\-4 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$，求：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；(3) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(4) $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

3. 计算下列矩阵的乘积.

(1) $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)$；

(3) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\2 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 3 & -2\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\3 & 2 & 1\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

5. 计算 $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$.

6. 有两种复合肥均由氮，磷，钾三种元素组成，它们所含成分情况见表 10-2-1：

表 10-2-1

化　肥	氮	磷	钾
第一种	0.6	0.2	0.2
第二种	0.5	0.4	0.1

现要生产第一种复合肥 50 吨，第二种复合肥 100 吨，试应用矩阵及其运算求出所需氮、磷、钾各是多少吨？

第三节　矩阵的初等行变换与矩阵的秩

一、矩阵的初等行变换

对矩阵的行实施下列三种运算，统称为矩阵的初等行变换.

(1)互换矩阵两行的位置(交换第 i，第 j 两行，记作 $r_i \Longleftrightarrow r_j$)；

(2)以不等于零的数 k 乘矩阵某一行的所有元(k 乘第 i 行，记作 kr_i)；

(3)把矩阵某一行所有元的 k 倍加到另一行的对应元上(第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，记作 r_j+kr_i).

二、矩阵的秩

将任意一个非零矩阵 $\boldsymbol{D}$ 化为阶梯形矩阵，这个阶梯形矩阵中非零行的行数称为原矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩，记作 $r(\boldsymbol{D})$.

练习 10.3

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$，将矩阵进行下列初等行变换.

(1)交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第二和第三行的位置；

(2)用 2 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行；

(3)将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第二行的(−1)倍加到第一行.

2.用矩阵的初等行变换将下列各矩阵化为阶梯形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 12\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. 将下列矩阵化为简化阶梯形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 求下列矩阵的秩.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & & 2 \end{pmatrix}$.

第四节 线性方程组的消元解法

一、非齐次线性方程组的消元解法

(一)线性方程组的一般形式

1. 对于 n 个未知量，m 个方程的线性方程组为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$，

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组；若常数项全为零，则称为与上述非齐次线性方程组相对应的齐次线性方程组.

2. 由方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 中的全体系数及常数项所组成

的矩阵称为方程组的增广矩阵，记作 $\widetilde{\mathbf{A}}$.

(二)非齐次线性方程组的消元解法

解非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的一般方法是，用初等行变换把该方程组的增广矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 化为阶梯形矩阵，求出该阶梯形矩阵所表达的方程组的解，它与该方程组是同解方程组，再将阶梯形矩阵化为简化阶梯形矩阵，于是也就得出了该方程组的解. 上述方法被称为消元法.

二、线性方程组解的判定

定理 非齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 有解的充分必要条件是系数矩阵 $\mathbf{A}$ 与其增广矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 的秩相等，即 $r(\mathbf{A})=r=r(\widetilde{\mathbf{A}})$.

(1)当 $r=n$(未知数的个数)时，有唯一解；

(2)当 $r<n$ 时，有无穷多组解，这时自由元的个数为 $n-r(\mathbf{A})$个.

推论 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ 一定有解：

(1)当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，仅有零解；

(2)当 $r(\mathbf{A})<n$ 时，有非零解.

练习 10.4

1. 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=18 \\ x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$.

2. 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \\ 5x_1+3x_2+4x_3=27 \end{cases}$.

3. 解线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$.

4. 解线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\x_2-x_3+x_4=-3\\x_1+3x_2-3x_4=1\end{cases}$.

5. 解线性方程组$\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+x_4=0\\x_1-3x_2+2x_3+3x_4=0\\3x_1+x_2+x_3+4x_4=0\end{cases}$.

6. 解线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-x_4=0\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=0\\3x_1-x_2+5x_3+x_4=0\\x_1+x_2-x_3+3x_4=0\end{cases}$.

测　试　题

1. 填空题.

(1)设 $\boldsymbol{A}=(1\quad 0\quad -1)$;$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{AB}=$________.

(2)设$\begin{bmatrix}3x&2y\\1&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-y&x\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-4\end{bmatrix}$,则 $x=$________,$y=$________.

(3)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$________.

(4)当 $\lambda=$________时,方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_1+\lambda x_2=1\end{cases}$无解.

2. 选择题.

(1)$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}(2\quad 3)=$(　　).

A. 8　　　B. $[2\quad 6]$　　　C. $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$　　　D. $\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$

(2)矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$的秩为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(3)线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1\\ x_2+3x_3=0\\ 2x_1+x_2+12x_3=0\end{cases}$　(　　).

A. 无解　　B. 有唯一解　　C. 有无穷多解　　D. 不能确定

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 7 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$, $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{C}$.

5. 解线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ x_2-x_3+x_4=-3\\ x_1+3x_2+x_4=1\\ -7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases}$.

6. 解线性方程组$\begin{cases}3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0\\ 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0\\ -x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0\\ 4x_1+15x_2-7x_3+9x_4=0\end{cases}$.

参 考 答 案

第一章 函　　数

练习 1.1

1. (1) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\{8\}$, $\{1,3,5,7\}$, $\{2,4,6\}$;

(2) $(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$, $[-10,-5)$, $(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$, $[-5,3)$;

(3) A, B, $\{0\}$, $\varnothing$.

2. $[-1,2)$.

3. (1) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$;　(2) $[1,5]$;　(3) $(-1,2]$;

(4) $\mathbf{R}\backslash\{(k+\frac{1}{2})\pi-1\mid k\in\mathbf{Z}\}$;　(5) $(-1,+\infty)$;　(6) $[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}]$.

4. (1)不同；(2)不同；(3)不同；(4)相同；(5)不同；(6)不同.

5. (1) $f(x)=x^2-5x+6$; (2) $f(x)=x^2-x+1$.

6. (1)偶函数;(2)非奇、非偶函数;(3)奇函数.

7. $a=\frac{7}{3}$, $b=-2$.

8. $f(1)=0(x\in R)$　$f(x^2)=2x^4+2x^2-4(x\in\mathbf{R})$

$f(a)+f(b)=2a^2+2b^2+2a+2b-8$

练习 1.2

1. $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$, $\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\dfrac{1}{1+x}}$.

2. $(x+1)^2$.

3. $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

4. 0; $\dfrac{\pi}{2}$; π.

5. (1) $y=\dfrac{1-x}{x+1}(x\neq-1)$; (2) $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}\left(x\neq\dfrac{a}{c}\right)$; (3) $y=\mathrm{e}^{1-x}-2$.

6. (1) $y=\sqrt{u}, u=1-v, v=\sin x$;　(2) $y=\sin u, u=x^2$;

(3) $y=e^u, u=v^2, v=\cos x$;　(4) $y=u^3, u=1+v, v=\lg x$;

(5) $y=\sin u, u=2+v, v=\ln x$;　(6) $y=\frac{1}{2}u, u=v^2, v=\tan x$.

7. $x^2-5x+6, (\sin x)^2-5\sin x+6$.

练习 1.3

1. (1) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$; (2) $[-3,3]$; (3) $\left(-\frac{1}{5},+\infty\right)$;

(4) $[1,2]$; (5) $(1,5]$.

2. (1) $f(-1)=0, f(0)=1, f(2)=3$; (2) $f(1)=4-\sqrt{2}$.

3. $0,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$.

4. (1)、(3)是基本初等函数,(2)、(4)、(5)、(6)为初等函数.

5. $f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)\ (x>1)$.

测试题

1. (1) $[-1,1]$; (2) $\pi+1$; (3) $2-2\cos^2 x$; (4) $y=\sqrt{u}, u=2-3x$; (5) π.

2. $1,2,\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 不同;不同;相同.

4. (1) $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;　(2) $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

5. (1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,

$g[f(x)]=(\sqrt{x+1})^4=(x+1)^2$,定义域为$[-1,+\infty)$;

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$,定义域为$[1,2]$,

$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$,定义域为$(-\infty,0]$.

6. $y=\begin{cases}0.3x, 0\leqslant x\leqslant 50\\ 0.3\times 50+045\times(x-50), x>50.\end{cases}$

7. 设小正方形边长为 x,箱子的体积为 V,则 $V=x(a-2x)^2, x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

8. 设销售量为 x,销售收入 R 为

$$R=\begin{cases}150x, 0\leqslant x\leqslant 80\\ 120(x-800)+120000, 800<x\leqslant 1600\end{cases}$$

9. 第二种方案比较合算.

第二章　极限与连续

练习 2.1

1.(1)2;(2)1;(3)0;(4)不存在;(5)1;(6)不存在.

2.略.

3.否.

4.$f(x)$在 $x\to0$ 时,极限存在为 1.

$g(x)$在 $x\to0$ 时,极限不存在,$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1$,$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-1$.

5.略.

6.(1)0;(2)不存在;(3)不存在.

7.4,2,不存在,2

练习 2.2

1.(1)24;(2)0;(3)$\frac{5}{3}$;(4)∞;(5)$\frac{2}{3}$;(6)$\frac{1}{2}$;(7)$\frac{1}{3}$;(8)0;(9)∞;(10)$-\frac{1}{2}$;(11)∞;(12)0;(13)-1;(14)$\frac{1}{2}$.

2.(1)$\frac{3}{5}$;(2)2;(3)$\frac{1}{2}$;(4)1;(5)x;(6)1;(7)$\frac{2}{\pi}$;(8)2;(9)$\frac{\pi}{2}$.

3.(1)$\frac{1}{\mathrm{e}}$;(2)e^2;(3)e^{-2};(4)e^{-6};(5)e^{-6};(6)e^5.

练习 2.3

1.略.

2.略.

3.(1)0;(2)0;(3)0;(4)0;(5)都不是;(6)都不是;(7)∞;(8)∞.

4.(1)0;(2)0;(3)∞;(4)0.

5.(1)2;(2)$\frac{3}{4}$;(3)$\frac{a^2}{2}$;(4)$\frac{5}{3}$;(5)$\frac{a}{n}$;(6)$\frac{1}{2}$;(7)$\frac{\sqrt{2}}{2}$;(8)$\frac{1}{4}$.

练习 2.4

1.左间断,右连续.

2.$a=2$,$b=-1$.

3.(1)1;(2)1;(3)1;(4)-2;(5)2;(6)-1.

4.略

5. $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

6. $a=1$.

7. $k=2$.

8. (1)无穷间断点;(2)$x=0$,连续,$x=1$,跳跃间断点;(3)连续;(4)可去间断点.

练习 2.5

1. (1)有界,闭区域; (2)有界,开区域;
(3)无界,闭区域; (4)无界,开区域.

2. (1)$V=xyh$;(2)$S=vt$;(3)$z=x+y$.

3. $f(0,1)=0$,$f(-2,3)=-\dfrac{12}{13}$.

4. $f(xy,x+y)=\dfrac{xy+x+y}{2xy(x+y)}$.

5. (1)$\{(x,y)\mid x^2+y^2<R\}$; (2)$\{(x,y)\mid x+y>0\}$;
(3)$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$; (4)$\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$;
(5)$x^2+y^2<1,x^2+y^2\neq 0,y^2\leqslant 4x$; (6)$x\leqslant y\leqslant -x$ 且 $x<0$.

6. (1)0;(2)$-\dfrac{1}{4}$;(3)$\dfrac{3}{2}$;(4)$\dfrac{\pi}{2}$.

7. $(x+y)^{x-y}+(x-y)^{x+y}$.

8. 0,0,1,0.

测试题

1. (1)$\dfrac{1}{2}$;(2)1.

2. (1)$\dfrac{4}{9}$;(2)$x\to\pm 1,x\to\infty$;(3)R,6;(4)不存在,2;(5)0.

3. (1)∞;(2)$\dfrac{1}{2}$;(3)∞;(4)$\dfrac{1}{4}$.

4. (1)$\dfrac{2}{3}$;(2)3;(3)e;(4)e.

5. $a=-7,b=6$.

6. 不连续.

7. $k=4$.

8. (1)$x=-3$,无穷间断点;(2)$x=0$,可去间断点;(3)$x=0$,可去间断点,$x=k\pi$(k 为整数),无穷间断点;(4)$x=1$,可去间断点,$x=2$,无穷间断点.

9. 略.

10. (1) $\frac{1}{4}$；(2) 0；(3) $\frac{2}{5}$；(4) 0；(5) -4；(6) $\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}$.

11. (1) $\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$；

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid x-1\leqslant y<x\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

第三章　导数与微分

练习 3.1

1. (1) $-\sin x$；　(2) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. (1) $y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$；　(2) $y'=-5x^{-6}$.

(3) $y'=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$；　(4) $y'=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}$.

3. $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 切线方程为 $x-4y+4=0$，法线方程为 $4x+y-18=0$.

5. $y\pm\frac{1}{24}=\frac{1}{4}\left(x\pm\frac{1}{2}\right)$.

6. $a=2, b=-1$.

练习 3.2

1. (1) $5x^4+6x+1$；　(2) $4x+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

(3) $2x-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}-3x^{-4}$；　(4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$；

(5) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$；　(6) $x-\frac{4}{x^3}$；

(7) $2x\cos x-x^2\sin x$；　(8) $\frac{\sin x-(1+x)\cos x}{\sin^2 x}$；

(9) $\sec^2 x+\cos x$；　(10) $\frac{2}{(1-x)^2}$；

(11) $20x+65$；　(12) $xe^x(2+x)$；

(13) $\frac{\sin x - x\ln x\cos x}{x\sin^2 x}$；　(14) $e^x(\cos x + x\cos x - x\sin x)$.

2. (1) $-\frac{2x}{1-x^2}$；　(2) $-\frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}\sin x$；

(3) $\frac{2+x-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$；　(4) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$；

(5) $4xe^{2x^2}$；　(6) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$；

(7) $e^{x^2}(2x\cos 3x - 3\sin 3x)$；　(8) $\ln(\cos x) - x\tan x$；

(9) $\frac{2x(x+1)\cos x^2 - \sin x^2}{(x+1)^2}$；　(10) $\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$；

(11) $2\sqrt{1-x^2}$；　(12) $e^{x\ln x}(\ln x + 1)$.

3. $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{11}{18}$.

4. $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

5. (1) $f'(-1) = -4$；(2) $f'(4) = -\frac{1}{18}$.

6. $x = -8, 0, 2$.

7. $x + y + e^{-2} = 0$.

8. 切线方程为 $2x - y + 1 = 0$，法线方程为 $x + 2y - 2 = 0$.

练习 3.3

1. (1) $-(1+m^2)\sin x\cos mx - 2m\cos x\sin mx$；(2) $6x\ln x + 5x$；

(3) $2 + \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$；(4) $(\ln a)^2 a^x\cos x - 2\sin x(\ln a)a^x - a^x\cos x$；

(5) $2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$；(6) $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$；(7) $-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(8) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$.

2. (1) $2\cos 2x f'(\sin^2 x) + \sin 2x f''(\sin^2 x)$；

(2) $\frac{f''(x)[1+f^2(x)] - 2f(x)[f'(x)]^2}{[1+f^2(x)]^2}$.

3. (1) $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$；(2) $e^x(x+n)$；(3) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$；

(4) $-\sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$.

4. (1) $2e^{x}(\cos x-\sin x)$；(2) $\frac{2-\ln x}{x\ln^{3}x}$；(3) -2；(4) 4.

练习 3.4

1. (1) $-\frac{y^{2}}{e^{y}+2xy}$；(2) $\frac{1+y^{2}}{2+y^{2}}$；(3) $\frac{2xy-2x^{3}}{2y^{3}-x^{2}}$；(4) $\frac{x+y}{x-y}$.

2. (1) $y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^{2}x}{\cos x}\right)$；

(2) $y'=2x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$；

(3) $y'\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}\cdot\frac{1-x-x^{2}}{1-x^{2}}$；

(4) $y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)}{(2x+1)^{5}}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{3-x}-\frac{10}{2x\frac{1}{4}}\right]$.

3. (1) $4t$；(2) $2t+2t^{2}$；(3) $\frac{2\sin 3\theta+6\theta\cos 3\theta}{1+\theta\sin\theta-\cos\theta}$；(4) $2t$.

4. $y'=\frac{1}{(e^{y}-1)(x+y)-1}$.

5. $y=-x-1$.

6. $f'(1)=-648$，$f'(3)=0$.

7. 50.

练习 3.5

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^{2}y-y^{3}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{3}-3y^{2}x$；

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy}{(x^{2}+y^{2})^{\frac{3}{2}}}$；

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot(x-2y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\cot(x-2y)$；

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^{2}(1+xy)^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^{y}\ln(1+xy)$；

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x}(\sin y+\cos y+x\sin y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x}(-\sin y+x\cos y)$；

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2x}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2x}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^{z}\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2x}}$.

2. (1) $-1,2$；(2) $4,5$；(3) $\frac{2}{5},\frac{2}{5}$.

3. (1) $12x^2-8y^2,-16xy,12y^2-8x^2$;

(2) $2a^2\cos 2(ax+by),2ab\cos 2(ax+by),2b^2\cos 2(ax+by)$;

(3) $\frac{1}{x},\frac{1}{y},-\frac{x}{y^2}$;

(4) $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}},-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}},\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$;

(5) $y^x\ln^2 y,x(x-1)y^{x-2},y^{x+1}(x\ln y+1)$;

(6) $6x,-6y,6y-6x$.

4. $f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xa}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0,f_{zx}(2,0,1)=4$.

5. (1) $z_x(1,2)=4,z_y(1,2)=13,z_x(2,1)=5,z_y(2,1)=5$;

(2) $f_x'(3,4)=\frac{8}{5},f_y'(3,4)=\frac{9}{5}$; (3) $f'_x(2,0)=1,f'_y(2,0)=2$.

6. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=3$.

7. $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=\frac{\pi}{2}}}=2$; $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=\frac{\pi}{2}}}=-1$.

练习 3.6

1. 0.71, 0.7; 0.0701, 0.07.

2. -0.11.

3. (1) $\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　　(2) $(\cos 2x-2x\sin 2x)\mathrm{d}x$;

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$　　(4) $\frac{2\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x$;

(5) $8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x$　　(6) $-\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(7) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]\mathrm{d}x$;　　(8) $\frac{ln5}{\sin x\cos x}\cdot 5^{ln\tan x}\mathrm{d}x$;

(9) $\frac{4x^3y}{2y^2+1}\mathrm{d}x$　　(10) $\frac{xy-y^2}{x^2+xy}\mathrm{d}x$

4. $(2-\sin 1)\mathrm{d}x$.　　5. $-2\mathrm{d}x$.

6. (1) 0.8747; (2) -0.965; (3) 5.04; (4) 0.01.

7. π cm^2.　　8. $0.1e^4$.

测试题

1. (1) √; (2) ×; (3) ×; (4) ×; (5) ×.

2. (1) D; (2) B; (3) B; (4) C; (5) C; (6) D; (7) B.

3. (1) $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$; $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$;

(2) 0; (3) -1; (4) $-2\arcsin(2\omega t+\varphi)$; (5) e^y, xe^y; (6) $2y$, $6x$; (7) $2x+y$.

4. (1) $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^3}$;

(2) $3\sin^2 x\cos x-3\cos 3x$;

(3) $e^x\cos^2 x(\cos x\ln x-3\sin x\ln x+\dfrac{1}{x}\cos x)$;

(4) $\sin(\ln x-\dfrac{\pi}{4})+\cos(\ln x-\dfrac{\pi}{4})$;

(5) $3^{\frac{x}{\tan x}}\ln 3(\cot x-x\csc^2 x)+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

(6) $\dfrac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$.

5. (1) $\dfrac{-4+3x}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$; (2) $\dfrac{(x^2-4x+6)e^x}{x^4}$; (3) $6x\ln x+5x$;

(4) $[a(a-1)x^{a-2}-x^a]\sin x+2ax^{a-1}\cos x$.

6. (1) $-\dfrac{1}{x\sin(xy)}-\dfrac{y}{x}$; (2) $\dfrac{e^y}{1-xe^y}$; (3) $\dfrac{xy-y^2}{x^2}$; (4) $\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$.

7. (1) $[6x(x-1)(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x})+(2x^3-3x^2+3)(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2})]dx$;

(2) $-6x\cos^2 x^2\sin x^2\,dx$; (3) $\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}dx$.

8. (1) $z_x=2xy^2+\dfrac{1}{y}$, $z_y=2x^2y-\dfrac{x}{y^2}$;

(2) $z_x=\dfrac{1}{x+y^2}$, $z_y=\dfrac{2y}{x+y^2}$;

(3) $z_x=y(1+x)^{y-1}$, $z_y=(1+x)^y\ln(1+x)$;

(4) $z_x=y\cos xy$, $z_y=x\cos y$;

(5) $z_x=(2a+y)^x\ln(2a+y)$, $z_y=x(2a+y)^{x-1}$;

(6) $z_x=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, $z_y=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$.

9. (1) $z_{xx}=6xy$; $z_{xy}=z_{yx}=2y+3x^2$; $z_{yy}=2x$;

(2) $u_{xx}=\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$; $u_{xy}=u_{yx}=\dfrac{y}{(x+y)^2}$; $u_{yy}\dfrac{-y}{(x+y)^2}$.

10. (1) 2.990 7; (2) 0.002.

11. $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=1$.

12. -2.

13. 切线方程为 $x+2y-4=0$,法线方程为 $2x-y-3=0$.

14. 约需加长 2.23 cm.

第四章　微分中值定理及导数的应用

练习 4.1

1. 略.
2. 略.
3. 略.
4. 略.
5. 有三个实根,分别位于区间 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内.
6. 略.
7. 略.
8. 略.
9. 略.

练习 4.2

1. (1) $\frac{\pi^2}{2}$;(2) ∞;(3) 0;(4) $\frac{1}{2}$;(5) $-\frac{1}{7}$;(6) 3;(7) $-\frac{3}{5}$;(8) 2.

2. (1) $\frac{1}{3}$;(2) $\frac{1}{4}$;(3) 1;(4) 0;(5) $\frac{1}{2}$;(6).

3. (1) 1;(2) 1;(3) e;(4) e^2.

4. 1.

5. 0.

练习 4.3

1. (1) 在 $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ 内单调增加,在 $(0,3)$ 内单调减少;

   (2) 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内单调减少,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调增加;

   (3) 在 $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 内单调减少,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内单调增加;

   (4) 在 $(-\infty,0)$ 单调增加,在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

2. (1) 略;(2) 略.

3.(1)$x=-\frac{1}{2}$时，函数有极大值$\frac{15}{4}$，$x=1$时，函数有极小值-3；

(2)$x=0$时，函数有极小值0；(3)无极值；

(4)$x=-\frac{1}{2}\ln 2$时，函数有极小值$2\sqrt{2}$；

(5)$x=\frac{3}{4}$时，函数有极大值$\frac{5}{4}$；

(6)$x=-1$时，函数有极小值$-\frac{1}{2}$，$x=1$时，函数有极大值$\frac{1}{2}$.

4.(1)极小值$f(3)=-32$，极小值$f(-1)=0$；

(2)极大值$f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{27}$，极小值$f(3)=0$；

(3)极小值$f(1)=2-4\ln 2$；

(4)极小值$f(0)=0$，极大值$f(\pm 1)=1$.

5.(1)最大值$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，最小值$f(-5)=-5+\sqrt{6}$；

(2)最大值$f(-1)=f(2)=5$，最小值$f(-3)=-15$；

(3)最大值$f(1)=-29$，最小值$f(3)=-61$；

(4)最大值$f(-1)=55$，最小值$f(-3)=27$.

6.长$\frac{3}{2}$ m、宽1 m时窗户面积最大，$y=\frac{3}{2}(\mathrm{m}^2)$.

7.5 000台.

8.$r=\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$，$h=2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

9.平分.

练习 4.4

1.(1)极大值$f(2,-2)=8$；　　(2)极大值$f(3,3)=27$；

(3)极大值$f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\sqrt{3}$；　　(4)极大值$f(3,2)=36$.

2.当三个数均为$\frac{a}{3}$时，乘积最大.

3.极小值$z(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2})=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4.两直角边都为$\frac{l}{\sqrt{2}}$时，周长最大.

5.当矩形边长分别为$\frac{2}{3}p$及$\frac{p}{3}$时，绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

6. 前墙长 100 m，高 75 m.

7. $\alpha=60^\circ$，$x=8$ cm.

8. 28 188 元.

练习 4.5

1. (1)在$(-\infty,2]$内是凸的，在$[2,+\infty)$内是凹的，$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$是拐点；

(2)在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$内是凸的，在$[-1,1]$内是凹的，$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$是拐点；

(3)在$(0,1]$内是凸的，在$[1,+\infty)$内是凹的，$(1,-7)$是拐点；

(4)在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内是凸的，在$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$内是凹的，$\left(-\frac{1}{2},20\frac{1}{2}\right)$是拐点.

2. $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$.

3. $a=1$，$b=3$，$c=0$，$d=2$.

4. $a=3$，拐点为$(1,-7)$，$(-\infty,1)$为凸区间，$(1,+\infty)$为凹区间.

5. $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$.

6. 凹区间为$(-1,+\infty)$；凸区间为$(-\infty,-1)$；拐点为$(-1,2)$.

练习 4.6

1. (1)$y=0$，$x=5$，$x=-1$；(2)$y=0$，$x=0$；(3)$y=x+\frac{1}{e}$，$x=-\frac{1}{e}$；

(4)$y=2x+\frac{\pi}{2}$，$y=2x-\frac{\pi}{2}$；(5)$x=1$，$y=3x+1$.

2. (1)斜渐近线 $y=x-3$，垂直渐近线 $x=-1$；

(2)垂直渐近线 $x=1$，水平渐近线 $y=1$；

(3)水平渐近线 $y=0$；

(4)垂直渐近线 $x=1$.

测试题

1. (1)0；(2)1；(3)$\frac{14}{9}$；(4)驻点或尖点；(5)极小值；(6)递减；(7)e^{-1}；(8)$(0,1)$；

(9)$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；(10)$y=0$；(11)$(2,-2)$.

2. (1)C；(2)B；(3)B；(4)A；(5)B；(6)D；(7)A；(8)A；(9)B；(10)C；(11)A.

3. $(0,0)$.

4. (1) $-\frac{4}{\pi^2}$; (2) e^2; (3) $\frac{1}{2}$; (4) 1; (5) $\frac{2}{\pi}$; (6) 1.

5. $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$为曲线的凸区间，$\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$为曲线的凹区间，拐点为$\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{27}\right)$.

6. $y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

7. $x=3$.

8. 略.

9. $a=0$，$b=-3$，极大值 2，极小值 -2，拐点 $(0,0)$，图象略.

10. 略.

11. $(1,1)$，极小值点.

第五章　不定积分

练习 5.1

1. (1) x^3; (2) $-\frac{1}{5}\cos 5x$; (3) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$; (4) $\frac{1}{3}e^{3x}$.

2. 略.

3. (1) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C$;　　(2) $2\sqrt{x}+C$;

(3) $2\sqrt{x}-2x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$;　　(4) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$;

(5) $x^3+\arctan x+C$;　　(6) $x-\arctan x+C$;

(7) $x-e^x+C$;　　(8) $\tan x-\sec x+C$;

(9) $-\frac{1}{x}-\arctan x+C$;　　(10) $2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$;

(11) $\frac{x+\tan x}{2}+C$;　　(12) $\frac{1}{2}x^2+9x+27\ln|x|-\frac{27}{x}+C$;

(13) $\frac{4}{7}\frac{x^2+7}{\sqrt[4]{x}}+C$;　　(14) $-\cot\theta-2\theta+C$;

(15) $\arctan x-\frac{1}{x}+C$;　　(16) $\arcsin x+C$.

(17) $\sin x+\cos x+c$;　　(18) $\frac{1}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$

4. $y=-x^4+7$.

5. (1) 4 m; (2) 6 s.

6. 不矛盾，因为结果之间只相差一个常数.

练习 5.2

1. (1) $\frac{1}{6}$; (2) $\frac{1}{7}$; (3) $\frac{1}{10}$; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\frac{1}{12}$; (6) $\frac{1}{2}$;

(7) $-\frac{2}{3}$; (8) $\frac{1}{5}$; (9) $\frac{1}{3}$; (10) -1.

2. (1) $\frac{1}{6}(3+4x)^{\frac{3}{2}}+C$; (2) $\frac{1}{2}\sin(2x-3)+C$;

(3) $-\frac{1}{5}e^{-5x}+C$; (4) $\frac{1}{12}(3x+1)^4+C$;

(5) $-\frac{1}{2}(2x-1)^{-1}+C$; (6) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+C$.

3. (1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; (2) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$;

(3) $-\ln|\cos x|+C$; (4) $\tan\frac{x}{2}+C$;

(5) $x-\ln(1+e^x)+C$; (6) $-2\cos\sqrt{x}+C$;

(7) $-\sqrt{1-x^2}+C$; (8) $-e^{\frac{1}{x}}+C$;

(9) $2\sqrt{1+\ln x}+C$; (10) $e^{\tan x}+C$;

(11) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; (12) $\frac{1}{4}\ln^4 x+C$;

(13) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$; (14) $\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C$;

(15) $\frac{1}{3}\tan^3 x+C$.

4. (1) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$; (2) $\frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{2}{3}}+C$;

(3) $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$; (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}x+C$;

(5) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$; (6) $\frac{2}{3}\sqrt{x-3}(x+6)+C$;

(7) $\sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C$; (8) $\arccos\frac{1}{x}+C$.

5. (1) $\ln|3x^2+7x+11|+C$;　　(2) $\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$;

(3) $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+C$;

(4) $\dfrac{2}{9}\sqrt{9x^2-4}-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{4}\right|+C$.

6. $y=x^3-3x+2$.

练习 5.3

1. (1) $x\ln x-(1+\ln 2)x+C$;　　(2) $x\sin x+\cos x+C$;

(3) $\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$;

(4) $\dfrac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}\right)+C$;　　(5) $\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$;

(6) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;　　(7) $-e^{-x}(x+1)+C$;

(8) $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$.

2. $x\sin x+\cos x+C$.

3. (1) $2x\sin\dfrac{x}{2}+4\cos\dfrac{x}{2}+C$;

(2) $-\dfrac{1}{x}\arctan x+\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

(3) $-\dfrac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$;

(4) $-\dfrac{1}{5}x(2-x)^5-\dfrac{1}{30}(2-x)^6+C$;

(5) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$;

(6) $-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$.

4. (1) $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$;

(2) $x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}(\arctan)^2+C$;

(3) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

(4) $-\dfrac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos\dfrac{x}{2}+4\sin\dfrac{x}{2}\right)+C$.

5. (1) $\dfrac{1}{10}xe^{10x}-\dfrac{1}{100}e^{10x}+C$;　　(2) $xf'(x)-f(x)+C$;

(3) $\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C$；

(4) $\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{5}e^{x}\sin x-\frac{1}{10}e^{x}\cos 2x+C$.

6. 略.

练习 5.4

1. (1) $-\frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}+C$；

(2) $\frac{1}{2}x^{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^{2}-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-1}\right|+C$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+x^{2}}+x-1}{1+x}\right|+C$；

(4) $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$；

(5) $-\frac{1}{2}\frac{\cos^{3}x}{\sin^{2}x}-\frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x+C$；

(6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$；

(7) $\frac{1}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$；

(8) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^{4}}{(1+x)^{2}(1+x^{2})}-\frac{1}{2}\arctan x+C$；

(9) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^{2}-1|+C$；

(10) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^{2}+x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$；

(11) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$；

(12) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$；

(13) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^{2}}}+C$；

(14) $x+\frac{x}{x^{2}+1}-\arctan x+C$.

测试题

1. (1) $-\frac{1}{2}F(e^{-x^{2}})+C$；

(2) $-\frac{x^{3}}{3}+x+C$；

(3) $xf'(x)-f(x)+C$；

(4) $\arcsin x$；

(5) $\arctan[f(x)]+C$.

2. (1)A；(2)D；(3)C；(4)C；(5)D.

3. (1) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{2}{5}(\arctan x)^{\frac{5}{2}}+C$; (2) $\frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$;

(3) $e^x+e^{-x}+C$; (4) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$;

(5) $\frac{1}{2}\ln^2(\arcsin x)+C$; (6) $\frac{1}{3}(\arctan x)^3+C$;

(7) $\ln x(\ln\ln x-1)+C$; (8) $\frac{1}{2}\arctan\sin^2 x+C$;

(9) $2e^x+x+C$; (10) $\frac{3}{4}(1+\ln x)^{\frac{4}{3}}+C$;

(11) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$; (12) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$;

(13) $2\sqrt{1+\tan x}+C$; (14) $\frac{1}{6}(2\ln x+1)^3+C$;

(15) $2f(\sqrt{x})+C$; (16) $\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$;

(17) $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C$; (18) $\frac{1}{6}\arctan\frac{2}{3}x+C$.

(19) $\frac{1}{102}(2x-3)^{51}+C$; (20) $-2\cos(\sqrt{t}+1)+C$;

(21) $-\frac{1}{6}e^{-3x^2+2}+C$; (22) $\frac{1}{5}\sin x^5+C$;

(23) $\ln|\tan x|+C$; (24) $\arctan e^x+C$;

(25) $x\sin x+\cos x+C$; (26) $-\frac{1}{2}e^{-2t}(t+\frac{1}{2})+C$;

(27) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$;

(28) $-\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2})+C$;

(29) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$;

(30) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{1}{10}\cos 2x)e^x+C$.

4. $y=\ln|x|+1(x\neq 0)$.

5. (1) 27 m; (2) $\sqrt[3]{360}\approx 7.11$ s.

6. 略.

7. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{6}$; (3) $-\frac{1}{12}$; (4) $\frac{1}{3}$; (5) $\frac{1}{3}$; (6) 1.

第六章　定积分及应用

练习 6.1

1. $\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\mathrm{d}x$.

2. $A=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\mathrm{d}x$.

3. (1)0;(2)0;(3)π;(4)1;(5)$\frac{3}{2}$;(6)1.

4. 略.

练习 6.2

1. (1) $\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{1}x^3\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$;

   (3) $\int_{0}^{1}(1+x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{0}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;　(4) $\int_{0}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

2. (1)$2\leqslant\int_{1}^{2}(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant5$;　(2)$\frac{\pi}{2}\leqslant\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}\mathrm{e}$;

   (3)$0\leqslant\int_{0}^{2}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\leqslant4\mathrm{e}^2$;　(4)$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

3. 略.

4. 略.

5. 略.

练习 6.3

1. (1)$2x\sqrt{1+x^4}$;(2)$\sin x^2$;(3)$\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x$;(4)$-\sin x\ln(\cos x)-2x\ln x^2$.

2. (1)$-\frac{1}{2\mathrm{e}}$;(2)0;(3)1;(4)$-\frac{1}{2}$.

3. (1)$\frac{17}{6}$;(2)$\frac{\pi}{6}$;(3)$\frac{5}{2}$;(4)$1-\frac{\pi}{4}$;(5)$\frac{2\pi}{6}$;(6)1;(7)2;

   (8)$\frac{\pi}{2}$;(9)$1+\frac{\pi}{4}$;(10)$\frac{4\sqrt{3}}{3}$;(11)$-\frac{1}{3}$.

4. (1)ln2;(2)$\frac{\pi}{6}$;(3)$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$;(4)$2-\frac{\pi}{2}$;(5)$2-\frac{\pi}{2}$;(6)$\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$;(7)4−3ln3;(8)1;

   (9)$\arctan2-\frac{\pi}{4}$;(10)$\frac{1}{2}(25-\ln26)$;(11)7+2ln2;(12)$\frac{5}{3}$.

5. (1)0; (2)$\frac{2}{3}$; (3)$\frac{1}{4}$; (4)$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$; (5)$\frac{3}{2}$; (6)$1+\ln\frac{2}{1+e}$; (7)$\frac{\pi}{2}$;

(8)$(\sqrt{3}-1)a$; (9)$\frac{\pi a^4}{16}$; (10)$\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

6. (1)$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$; (2)$\frac{2}{5}(1-e^{\pi})$; (3)$6-2e$; (4)$\pi^2$;

(5)$\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$; (6)$\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$;

(7)$\frac{e^2+1}{4}$; (8)$\pi-2$.

7. (1)0; (2)0; (3)0; (4)0.

8. 略.

9. 2.

练习 6.4

1. (1)发散; (2)发散; (3)$\frac{1}{2}\ln 2$; (4)1; (5)$-\frac{\ln 2}{2}$; (6)π.

2. (1)π; (2)$\frac{8}{3}$; (3)$\frac{\pi}{2}$; (4)$\frac{\pi^2}{8}$.

3. $k\geqslant 1$ 时发散, $0<k<1$ 时收敛.

4. $k>1$ 时收敛.

5. $k=\frac{2}{\pi}$.

6. $c=\frac{5}{2}$.

7. 当 $k>1$ 时,收敛于$\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$;当 $k\leqslant 1$ 时,发散;当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$时,取得最小值.

练习 6.5

1. (1)$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{4}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$; (2)$\frac{2}{3}$; (3)$\frac{12}{7}$; (4)$\frac{1}{6}$; (5)$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$; (6)$\frac{1}{3}$; (7)$\frac{7}{6}$;

(8)$\frac{3}{2}-\ln 2$.

2. (1)$\frac{4}{3}\sqrt{2}$; (2)$\frac{16}{3}$.

3. (1)πa^2; (2)a^2.

4. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$；(2) $3\pi a^2$.

5. (1) 2π；(2) $160\pi^2$；(3) $\frac{\pi^2}{2}$，$\pi(\pi-2)$；(4) $7\pi^2 a^3$.

6. $\frac{9}{5}k$（k 为比例常数）.

7. $b^2+\frac{1}{3}b^3$

8. 168（克）

练习 6.6

1. $\frac{4}{3}\pi$.

2. (1) $\frac{\pi}{e^2}\leqslant I\leqslant\pi$；(2) $36\pi\leqslant I\leqslant 100\pi$.

3. (1) $\iint\limits_D(x+y)^2\,d\sigma\geqslant\iint\limits_D(x+y)^3\,d\sigma$；(2) $\iint\limits_D(x+y)^2\,d\sigma\leqslant\iint\limits_D(x+y)^3\,d\sigma$.

4. (1) $\frac{1}{3}\pi a^3$； (2) $\frac{2}{3}\pi a^3$； (3) π.

5. $\iint\limits_D\ln(x+y)\,d\sigma>\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\,d\sigma$.

练习 6.7

1. (1) $1\frac{1}{8}$；(2) $\frac{1}{12}$；(3) $\frac{1}{40}$；(4) $\frac{\pi a^3}{3}$.

2. (1) $I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx$；

(2) $I=\int_{-R}^{R} dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_0^R dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx$；

(3) $I=\int_{-1}^{1} dx\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$；

(4) $I=\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,dx$.

3. (1) $I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$；

(2) $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$；

(3) $I=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)\,dx$；

(4) $I=\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

4. (1) $\frac{1}{e}$；(2) 9；(3) $\frac{6}{55}$；(4) $\frac{\pi}{2}$；(5) $\pi^2-\frac{40}{9}$；(6) -2.

测试题

1. (1) √；(2) ×；(3) ×；(4) ×；(5) √.

2. (1) 0；(2) $3x^2 f(x^3)$；(3) 1；(4) $\frac{5}{2}$；(5) $F(x+a)-F(2a)$；(6) $F(b)-F(a)$；

(7) 0；(8) 0；(9) 1；(10) $\int_0^4 dx\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；(13) 4；(14) π^2.

3. (1) C；(2) A；(3) B；(4) B；(5) A；(6) A；(7) B；(8) D.

4. (1) $2\sqrt{3}-1$；(2) $\pi-\frac{8}{3}$；

(3) $ab\arctan\frac{b}{a}$；(4) $\frac{1}{4}(e^{\pi}+1)$；

(5) $\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$；(6) $\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}$；

(7) $\frac{21}{400}$；(8) $\frac{29}{6}$；(9) $\ln\frac{1+e}{2}$；

(10) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi^2}{32}$；(11) $\frac{13}{2}$；(12) $\frac{7}{72}$；(13) 0.

5. $\frac{9}{2}$.　　6. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

7. $\frac{2}{3}R^3\rho$（ρ 为水的密度）.　　8. $\frac{4}{3}\pi r^4\rho g$.

9. $\frac{3}{2}$.　　10. $14a^4$

11. $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

12. $\frac{9}{2}$.　　13. $\frac{9}{2}$.

第七章　常微分方程

练习 7.1

1. (1) 是，一阶；　(2) 是，一阶；

(3) 是，一阶；　(4) 否，偏微分方程；

(5) 是，二阶；　(6) 是，八阶；

(7)否,偏微分方程.

2.(1)不是解; (2)不是解; (3)通解; (4)特解.

3.特解为 $y=\sin 2x$.

4.$y=\dfrac{1}{3}x^3$.

5.(1)$y=e^{cx}$;(2)$e^{y^2}=C(1+e^x)^2$;

(3)$1+y^2=Ce^{-\frac{1}{x}}$;(4)$\ln y=Ce^{\arctan x}$;

(5)$y=Cxe^{\frac{1}{x}}$;(6)$\arcsin x+\arcsin y=C$.

6.(1)$e^y=\dfrac{1}{2}(1+e^{2x})$;(2)$y=\dfrac{1}{2}x^3$.

7.$y=e^x$

练习 7.2

1.(1)$\sin\dfrac{y}{x}=Cx$;(2)$y^2=x^2\ln(Cx)^2$;(3)$-e^{-\frac{x}{y}}=\ln(Cx)$;(4)$\ln y+\dfrac{x}{y}=C$

2.(1)$y=e^{cx}$;(2)$\ln^2 x+\ln^2 y=C$;

(3)$y=Cx^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{1}{3}\sin x}$;(4)$y=e^{-x}(-e^{-x}+C)$;

(5)$(y^2-1)(x^2-1)=C$;(6)$y=-x\cos x+Cx$.

3.(1)$y=e^{-x}(x+C)$; (2)$y=\cos x(C-2\cos x)$;(3)$y=e^{-x^2}(C+x^2)$;

(4)$y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$;

(5)$y=(x-2)^3+C(x-2)$;(6)$y^2-2xy=C$;

4.(1)$y=\dfrac{2}{3}(4-e^{-3x})$;(2)$y^2-1=2\ln(1+e^x)-2\ln(1+e)$;(3)$y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$;

(4)$2xy=e^{2x}+2xe$;(5)$2(x^3-y^3)+3(x^2-y^3)+6=0$;

(6)$y^2=2x^2(\ln x+2)$.

5.$y=3e^x+2(x-1)e^{2x}$

6.$y=2(e^x-x-1)$

7.(1)$y'=x^2$ (2)$y'=-2x$

练习 7.3

1.(1)$y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

(2)$y=\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$;(3)$y=\dfrac{1}{2}e^x-C_1e^{-x}+C_2$;

(4) $y=e^x+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$；(5) $y=C_2e^{C_1x}+1$；

(6) $y=-e^{-x}+x+C$；

(7) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$；

(8) $y=x^3+3x+C_2$；(9) $y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$；

(10) $y=C_1e^x+C_2$.

2. (1) $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$； (2) $y=\frac{C_1}{3}(x-1)^3+C_2$；

(3) $y=C_1e^x+C_2$； (4) $y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$；

(5) $y=C_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$.

3. (1) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{7}{6}$； (2) $y=x^2-x+1$；

(3) $y=\frac{1}{2}(x-e^{-x})+\frac{1}{2}$； (4) $x(1-y)=1$；

4. $y=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{e^2}{4}x^2+\frac{e^2}{4}x-\frac{1}{8}e^2$

5. $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$

练习 7.4

1. (1) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$；(2) $y=C_1+C_2e^{-14x}$；(3) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$；

(4) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$；(5) $y=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$；

(6) $y=C_1e^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}x}$；(7) $y=(C_1+C_2x)e^x$；

(8) $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

2. (1) $y=4e^x+2e^{3x}$；(2) $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$；(3) $y=\frac{5}{3}e^x+\frac{1}{3}e^{-2x}$；

(4) $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$；(5) $y=e^{\frac{x}{2}}(2+x)$；

(6) $y=(4+26x)e^{-6x}$.

3. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$.

4. 是两个解，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 不是该方程的通解，因为 y_1 与 y_2 线性相关

5. (略)

6. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$，$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-x}$

练习 7.5

1.(1)$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$；(2)$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{125}\left(\frac{25}{3}x^2-5x+2\right)e^{2x}$；

(3)$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$；(4)$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$；

(5)$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$；

(6)$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)e^{3x}$.

2.(1)$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$；(2)$y=\frac{5}{12}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{3}-x$；

(3)$y=\frac{13}{56}e^x+\frac{3}{56}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}$；

(4)$y=e^x-e^{-x}+e^x(x^2-x)$.

3.(略)

4.(1)$y_p=Ax^2+Bx+C$　(2)$y_p=Ax^2e^{-\frac{3}{2}x}$

(3)$y_p=(Ax+B)e^{2x}$　(4)$y_p=e^{-2x}(A\cos2x+B\sin2x)$

5.(1)$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

(2)$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$

(3)$y=C_1e^{\frac{3}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$

(4)$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

6.(1)$y=e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}-x-\frac{1}{2}$　(2)$y=e^{-x}(x-\sin x)$

7. $y=\cos3x-\frac{1}{3}\sin3x$

测试题

1.(1)A；　(2)C；　(3)D；　(4)D　(5)C　(6)B.

2.(1)三；　(2)$r^2+r=0$；　(3)$y=C_1+C_2e^{4x}$；　(4)$y=Ax^2e^x$；

(5)$y=-2\sin x+C_1x+C_2$；　(6)$y=x(A\cos x+B\sin x)$.

3.(1)是；　(2)否；　(3)是；　(4)是.

4.(1)$2e^{3x}-3e^{-y^2}=C$；　(2)$x-y+\ln|xy|=C$，$y=0$；

(3) $x-\sqrt{xy}=C$； (4) $\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$；

(5) $y=Cx$； (6) $y=\frac{C}{x}-\cos x+\frac{\sin x}{x}$；

(7) $y=2+Ce^{-x^2}$； (8) $x=Ce^{2y}+\frac{1}{4}(2y^2+2y+1)$.

5. (1) $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2$； (2) $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$；

(3) $y=e^x+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$； (4) $x(C_1-y)=C_2$；

(5) $e^y=x^2+C_1x+C_2$； (6) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$.

6. (1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{11x}$； (2) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{5x}$；

(3) $y=(C_1+C_2x)e^{4x}$； (4) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$；

(5) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$； (6) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$；

(7) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$；

(8) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{3}{4}x\cos 2x$.

7. (1) $-y\ln|x^2+1|+y=1$； (2) $y=\frac{1}{3}(x+1)^3+\frac{2}{3}$；

(3) $y=e^{2x}$； (4) $y=\frac{1}{3}\sin 2x+\frac{28}{3}\sin x$.

8. $y=\frac{1}{9}e^{3x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$.

9. $y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

10. (1) $x(1+2\ln y)-y^2=0$；(2) $y=(4+26x)e^{-6x}$；(3) $y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

11. $f(x)=2(1-e^{\frac{x^2}{2}})$.

第八章　向量代数与空间解析几何

练习 8.1

1. 略

2. 略

3. A. Ⅷ　　B. yOz 面　　C. y 轴　　D. Ⅴ

练习 8.2

1. (1) $\{16,0,-20\}$　(2) $\{3m+2n,5m+2n,-m+2n\}$
2. $(3,2,9)$
3. (1) $3,\frac{1}{3}\{2,2,1\}$　(2) $\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$
4. $m=15,n=-\frac{1}{5}$
5. 略
6. $\boldsymbol{x}=(7,-1,10),\boldsymbol{y}=(-11,2,-16)$.
7. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.
8. $(2,-3,1),(2,3,-1),(-2,3,1)$.
9. 点 M 到原点的距离为 $5\sqrt{2}$，点 M 与 x,y,z 轴的距离分别为 $\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$，5，点 M 与 xOy,yOz,zOx 面间的距离分别为 5，4，3.
10. $(1,0,0),(-1,0,0)$.
11. $(0,0,-3)$.

练习 8.3

1. (1) xOy 坐标面　(2) 平行于 z 轴的平面
   (3) 平行于 xOz 坐标面的平面　(4) 过 z 轴的平面
   (5) 过原点的平面　(6) 在各坐标轴上的截距均为 3 的平面
2. $x-2y+3z+3=0$
3. $7x-3y+z-16=0$
4. (1) $x-1=0$　(2) $3x+y=0$
   (3) $9x+z-34=0$　(4) $x+z-1=0$
   (5) $x+y+z=2$
5. (1) 垂直　(2) 平行　(3) 相关
6. $x-6y-3z-3=0$
7. $\frac{\pi}{3}$
8. $\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}$

练习 8.4

1. $\dfrac{x-1}{3}=y-1=\dfrac{z-1}{\sqrt{2}}$.

2. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

3. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

4. $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+1}{12}=\dfrac{z-1}{13}$.

$$\begin{cases} x=-5t \\ y=-1+12t. \\ z=1+13t \end{cases}$$

5. $D=3$.

6. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{5}$

7. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$

8. $\theta=\arccos\dfrac{14}{39}$

9. $\dfrac{4}{\sqrt{61}},\dfrac{6}{\sqrt{61}},\dfrac{-3}{\sqrt{61}}$

10. $B=1,D=-9$

练习 8.5

1. (1) $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2+a^2z^2-a^2(a^2-c^2)=0$

(2) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9 \\ (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4 \end{cases}$

(3) $(x+4)^2+(y-3)^2=8(z-2)$

2. (1) $(x-2)^2 1+(y+2)^2+(z-1)^2=4$　(2) $y^2+z^2=5x$

(3) $y^2=2x$　(4) $z^2=3(x^2+y^2)$

3. (1) $(0,0,3),R=4$　(2) $\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right),R=1$

4. (1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1,\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$

(2) $x^2+z^2=y,z=\sqrt[4]{x^2+y^2}$

(3) $x^2-y^2-z^2=1,x^2-y^2+z^2=1$

5.(1)圆柱面　(2)平面　(3)椭球面　(4)单叶双曲面

(5)抛物面　(6)圆锥面　(7)二平面　(8)双叶双曲面

6.(1)$\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1-\frac{x_0{}^2}{9}$　(2)$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1+\frac{y_0^2}{25}$

(3)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1-\frac{z_0^2}{4}$

7. 以$(1,-2,-1)$为球心,半径为$\sqrt{6}$的球面.

8. $y^2+z^2=5x$.

练习 8.6

1. $\begin{cases}y^2=2x-9\\z=0\end{cases}$,原曲线为位于平面 xOy 上的抛物线.

2. (1)在平面 $y=3$ 上以$(0,3,0)$为圆心,5 为半径的圆.

(2)直线$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{0}=z$.

3. xOy 面$\begin{cases}z=0\\x^2+y^2=x+y\end{cases}$.

yOz 面$\begin{cases}x=0\\2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0\end{cases}$.

zOx 面$\begin{cases}y=0\\2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0\end{cases}$.

4.(1)$\begin{cases}3x^2+2y^2=16\\z=0\end{cases}$　(2)$\begin{cases}x^2+y^2-x-1=0\\z=0\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1\\z=0\end{cases}$　(4)$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$

5.(略)

测试题

1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)√

2.(1)$\{10,-2,6\}$　(2)$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,-1,2\}$

(3)$7y+z-5=0$　(4)$\frac{x}{0}-\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$

3.(1)C　(2)B　(3)B　(4)C

4.(1)椭球面　(2)旋转抛物面　(3)圆锥面　(4)交于 z 轴的两平面　(5)双曲柱面　(6)交线为圆

5. $\dfrac{x-1}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{y-2}{-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{z-1}{\dfrac{1}{3}}$

6. $4x+5y-2z+12=0$

6. 3.

7. $(x-z)^2=y-2z$.

9. $x^2+y^2-z^2=0$.

10. $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=a^2(2\cos^2\theta-1)=a^2\cos2\theta\end{cases}$.

11. $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$.

第九章　无穷级数

练习 9.1

1.(1)$(-1)^n\dfrac{1}{2^{n-1}}$　(2)$\dfrac{n+1}{n}$　(3)(4)略

2.(1)$\dfrac{1}{2}$;1;$\dfrac{11}{8}$;$\dfrac{13}{8}$;$\dfrac{57}{32}$　(2)-1;$\dfrac{2}{3}$;0;$-\dfrac{4}{5}$;$\dfrac{5}{3}$

3.(1)发散　(2)发散　(3)发散　(4)收敛

4.(1)发散　(2)发散

5.(1)发散　(2)发散

6.(1)发散;　　　(2)收敛.

7. 发散.

练习 9.2

1.(1)发散;　(2)收敛;　(3)收敛;　(4)$a>1$ 收敛,$0<a\leqslant1$ 发散;
　(5)发散;　(6)收敛.

2.(1)收敛;　(2)发散;　(3)收敛;　(4)收敛;　(5)发散;　(6)收敛.

3.(1)收敛;　(2)收敛;　(3)收敛.

4.(1)收敛;　(2)收敛;　(3)发散;　(4)发散;　(5)发散.

5.$a>1$ 时收敛,$0<a\leqslant1$ 时发散

会.$x\in(0,1)$时收敛

练习 9.3

1.(1)收敛； (2)发散； (3)收敛.

2.条件收敛

练习 9.4

1. (1)$(-1,1)$； (2)$(-\infty,+\infty)$； (3)$[-1,1]$； (4)$[-3,3)$；

(5)$[-1,1]$； (6)$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$； (7)$[4,6)$； (8)$[-1,1]$.

2. (1)$\frac{2x}{(2-x)^2}$； (2)$\arctan x$； (3)$\frac{2x}{(1-x)^3}$；

(4)$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$.

3.(1)$R=1$ (2)$R=\mathrm{e}$ (3)$R=2$ (4)$R=+\infty$

4.(1)$(-\infty,+\infty)$ (2)$\{x|x=0\}$ (3)$(-1,1)$

5.(1)$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ (2)$[1,3]$

6.$\ln(1+x)$

7.$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

练习 9.5

1.(1)$a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x\ln a)^n,x\in(-\infty,+\infty)$

(2)$\ln(2-x)=\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1},x\in[-2,2)$

(3)$\sin^2 x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$

(4)$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1},x\in(-1,1)$

(5)$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1)$

(6)$\sin\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$

2.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$

3.$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^n},x\in(2,4)$

4. $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\sqrt{3}\dfrac{\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$, $x\in(-\infty,+\infty)$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$, $x\in(-6,-2)$

练习 9.6

1. (1) 2.718 28; (2) 2.004 30.

2. (1) 0.487; (2) 0.097 5.

3. (1) 3; (2) $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

4. (1) $y=x+\dfrac{1}{1\times2}x^2+\dfrac{1}{2\times3}x^3+\cdots$;

(2) $y=a_0\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{3n\cdot(3n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2}\right]+a_1\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n+1}}{(3n+1)\cdot3n\cdot\cdots\cdot4\cdot3}\right]$.

测试题

1. (1) 必要非充分；　(2) 充分必要；　(3) 收敛，发散.

2. $u_1=S_1=1$，　$u_2=S_2-S_1=\dfrac{1}{3}$，　$u_n=\begin{cases}1, & n=1\\ \dfrac{2}{n(n+1)}, & n\geqslant2\end{cases}$.

3. (1) 收敛；(2) 发散.

4. (1) 收敛；(2) 收敛；(3) 收敛；(4) 发散；(5) 收敛.

5. (1) 条件收敛；(2) 条件收敛；(3) 绝对收敛；(4) 绝对收敛；(5) 条件收敛.

6. (1) $(-1,1)$；　(2) $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$；　(3) $[-1,1)$；　(4) $(-2,0)$.

7. (1) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$；

(2) $S(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & [-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$.

(3) $S(x)=\dfrac{x-1}{(2-x)^2}$　$x\in(0,2)$.

8. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+1}$　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n$　$x\in(-a,a]$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}(-1)^n(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}x^n, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

10. $\ln2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{1}{3}\frac{(x-2)^3}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}+\cdots, x\in(0,4]$

第十章　线性代数基础

练习 10.1

1. (1)16　　(2)$(a-b)(b-c)(c-a)$

2. (1)8　　(2)-270

3. $x_1=1+\sqrt{5}, x_2=1-\sqrt{5}$

4. (1)$x_1=3, x_2=4, x_3=-\frac{3}{2}$

(2)$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=-1$

5. 方程组仅有零解.

6. 当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时,齐次线性方程组有非零解.

练习 10.2

1. (1)、(2)为阶梯形矩阵;

(3)、(4)为简化阶梯形矩阵.

2. (1)$\begin{pmatrix}4 & 8\\ -1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$　　(2)$\begin{pmatrix}2 & 2\\ -7 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3)$\begin{pmatrix}7 & 13\\ -5 & -2\\ 6 & -1\end{pmatrix}$　　(4)$\begin{pmatrix}0 & -4\\ -13 & -8\\ -4 & 3\end{pmatrix}$

3. (1)14　　(2)$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$　　(3)$\begin{pmatrix}-1 & -4 & -4\\ -5 & 13 & -8\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-6 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$

6. 氮、磷、钾分别为 80,50,20 吨

练习 10.3

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. (1) $r(\boldsymbol{A})=3$　(2) $r(\boldsymbol{B})=2$

(3) $r(\boldsymbol{C})=4$　(4) $r(\boldsymbol{D})=2$

练习 10.4

1. $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=3 \\ x_1=1 \end{cases}$

2. 方程组无解.

3. $\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}c_1-\dfrac{3}{4}c_2+\dfrac{5}{4} \\ x_2=\dfrac{3}{2}c_1+\dfrac{7}{4}c_2-\dfrac{1}{4}. \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$ （其中 c_1,c_2 为任意常数）

4. $\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=c+3 \\ x_3=2c+6 \\ x_4=c \end{cases}$ （其中 c 为任意常数）

5. $\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}c_1-\dfrac{3}{2}c_2 \\ x_2=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{2}c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$ （其中 c_1,c_2 为任意常数）

6. $\begin{cases} x_1=c \\ x_2=-6c \\ x_3=-2c \\ x_4=4 \end{cases}$ （其中 c 为任意常数）

测试题

1.(1)$(0\quad 3\quad 3)$ (2)$\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}$

(3)3 (4)1

2.(1)D (2)D (3)B

3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -4 & -11 & 9 \\ 4 & -7 & -7 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 10 & 14 & 0 \\ 17 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 6 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3 \\ x_3=6 \\ x_4=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{3}c \\ x_2=-\dfrac{2}{3}c \\ x_3=-\dfrac{1}{3}c \\ x_4=c \end{cases}$ （其中 c 为任意常数）