



第二章 极限与连续

2.2 极限的运算法则

(2) 两个重要极限

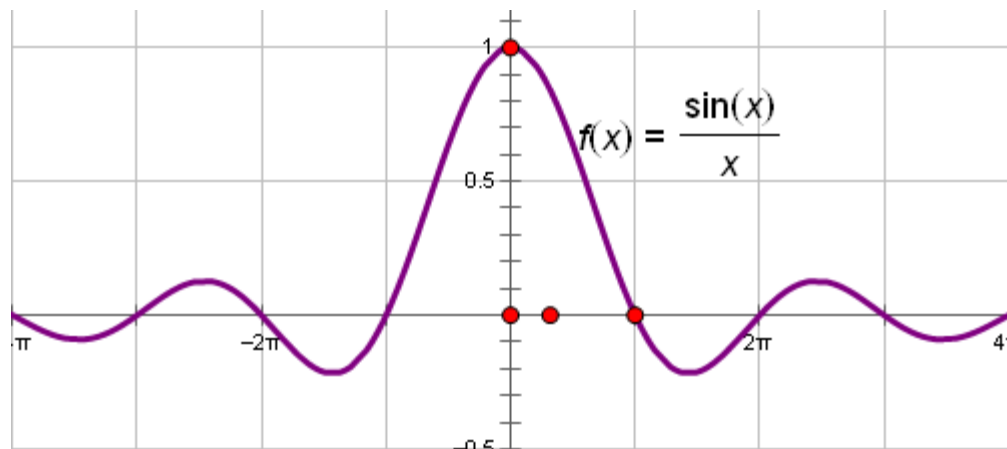
一 重要极限之： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

此极限的证明：略

可以观察该函数
图像，如右图：

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$





一 重要极限之： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

此极限的用法关键在于其形式！ $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$

公式中三个□所在位置必须保持一致~~

该极限适用于带有三角函数的“ $\frac{0}{0}$ ”型的极限.



例1: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解: 注意分子: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$



例2: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

解 令 $u(x) = 5x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$.
:

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}$

$$= 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 5.$$



考察

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{5x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

结论:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \square = 0$$



例3: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\tan x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}}$$

$$= 1.$$



二倍角公式:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

解: 二倍角公式: $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2$$



练习：计算下列极限

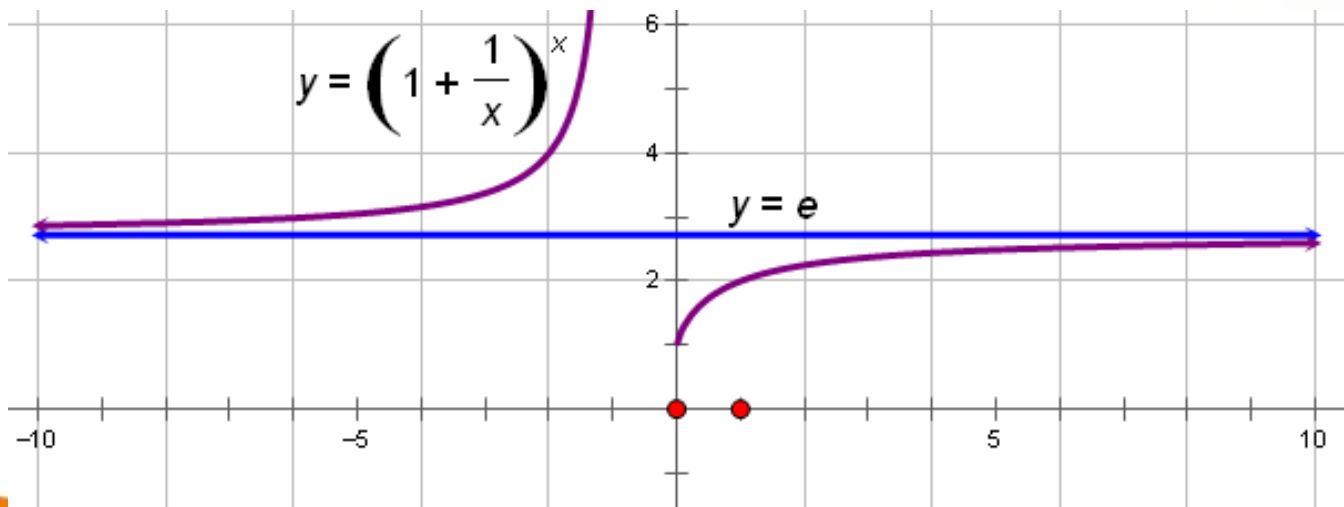
$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 7x}.$$

二 重要极限之： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

函数 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的函数图像：

观察当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数的极限：





二重要极限之： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

观察 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

(1) 底 $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$; (2) 指数趋向于 ∞ ;

通常把这种类型的极限问题称为“ 1^∞ ”型极限.



同第一个重要极限类似，该极限的一般公式：

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square} \right)^{\square} = e.$$



例5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \times 2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$$

“ 1^∞ ”型

分析:

与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

对比,

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{\boxed{\quad}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{\boxed{\frac{x}{2}}}\right)$$



例6: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$.

“ 1^∞ ” 型

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-x}{5}}\right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{-x}{5}}\right)^{\frac{-x}{5}} \right]^{-5} = e^{-5}.$$



例7: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

“ 1^∞ ” 型

解: 令 $u = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

公式: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$



例8: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x$.

“ 1^∞ ”型

解1: 令 $\frac{2-x}{3-x} = 1 + \frac{1}{u}$, 解得 $x = u + 3$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{u+3}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \right)^3 \right]$$

$$= e \cdot 1 = e.$$



例8: 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x$.

“ 1^∞ ”型

解2:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} \right)^x$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x} = \frac{e^{-2}}{e^{-3}} = e.$$



练习：计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$$